GX-M-23

00053367

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

00053367

Digitized with financial assistance from
Observer Research Foundation
on 22 February, 2020

DISSERTATIONS

SUR LA

THÉORIE DES COMÉTES

QUI ONT CONCOURU AU PRIX PROPOSÉ

Literary Society PAR of Bombay

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES LETTRES DE PRUSSE,

Pour l'année 1777, & *adjugé en* 1778,

Publiées avec la Permission de L'ACADÉMIE.

à UTRECHT,

Chez BARTHELEMY WILD,

MDCCLXXX.

O
523.6
Acc/Dis
53367

AVIS

La classe de Mathématiques de l'Académie Royale des Sciences & Belles Lettres de Prusse, proposa pour le prix à décerner le 31. Mai 1774, la question énoncée en ces termes.

Il s'agit de perfectionner les méthodes qu'on employe pour calculer les orbites des Comètes d'après les observations; de donner surtout des formules générales & rigoureuses, qui renferment la solution du Problême où il s'agit de déterminer l'orbite parabolique d'une Comète par le moyen de trois observations & d'en faire voir l'usage pour résoudre ce Problême de la maniere la plus simple & la plus exacte.

En 1776. l'Académie déclara que dans quelques unes des pieces, qu'elle avoit reçues sur ce sujet, elle avoit trouvé

beaucoup de travail & des vues analytiques très profondes ; mais que les Auteurs de ces pieces, ne lui paroissoient pas avoir rempli le but principal de la question qui étoit de procurer aux Astronômes des moyens faciles & directs de calculer les orbites des Comètes d'après les observations.

En conséquence elle renvoya le prix à l'an 1778 ; ce prix devoit être double.

Enfin dans son assemblée du 4 Juin 1778, elle partagea ce prix double entre les deux premieres, & accorda *l'accessit* aux deux dernieres pieces que nous publions dans l'ordre dans lequel elles ont été proclamées.

ESSAI
SUR LA THÉORIE
DES COMÈTES.

PAR

M. le Marquis de CONDORCET, Secrétaire de l'Académie Royale des ſciences de Paris, & membre des Académies de Bologne, de Turin, de Philadelphie & de Pétersbourg.

Quæ, an vera ſint, Dii ſciunt quibus eſt cognitio veri. Nobis rimari illa & conjecturâ ire in occulta tantum licet, nec cum fiduciâ inveniendi, nec ſine ſpe.

ESSAI

SUR LA

THÉORIE DES COMÈTES.

En cherchant à répondre à la *question* de l'*Académie*, on trouve d'abord que quoique le Probléme paroisse très simple en *lui* même, cependant l'*impossibilité* ou l'on est d'observer immédiatement les ordonnées de l'orbite d'une Comète, le rend d'une très grande complication. Une Solution directe paroissant donc impraticable, j'en ai cherché une autre, & j'ai observé que si je supposois une quatrième *observation* exacte à très peuprès, & que je cherchasse à faire passer l'orbite par ces quatre observations, j'aurois toutes les inconnues par des équations linéaires. Le travail de l'élimination étant encore très-long, j'ai donc considéré l'orbite comme rectiligne; alors la méthode analytique est praticable, & donne à peu près la position du plan de l'orbite cherchée.

Dans cet Essai j'ai toujours proposé de n'employer, pour trouver une première approchée, qu'une nouvelle observation qu'on suppose différer très peu de ce que l'orbite déterminée par les autres observations donneroit pour le même instant ou le même lieu. Cette supposition qu'on peut faire toutes les fois qu'on a plus d'observations que d'indéterminées, est plus commode pour la pratique, qu'aucune autre méthode.

Comme la première approximation peut quelque fois n'être pas suffisante, &

qu'il faut alors employer des approximations ſucceſſives, j'ai joint à cet Ecrit des formules calculées pour pouſſer les approximations auſſi loin qu'on voudra, ſans avoir beſoin de faire aucune ſubſtitution. Les valeurs approchées qui ſervent à déterminer le plan de l'orbite, étant une fois connues, on déduira de ces valeurs d'autres valeurs approchées pour le reſte des élémens de l'orbite. Cette méthode eſt peut-être encore trop longue pour être adoptée, & j'en expoſe une autre par laquelle ayant l'orbite rectiligne à peu près par cinq obſervations, & regardant cette ligne comme tangente de l'orbite parabolique, on a pour cette orbite une première approximation, de laquelle on peut en déduire une autre auſſi approchée qu'on voudra.

Il n'y a aucun inconvénient *à exiger cinq* obſervations pour la détermination. En effet on peut remarquer qu'une de ces obſervations n'eſt *pas ſuppoſée* exacte, mais ſeulement approchée, à une quantité près du même ordre, que la diſtance qu'il peut y avoir entre l'orbite vraie & l'orbite ſuppoſée rectiligne. Reſte donc quatre obſervations par les quelles on ſuppoſe qu'ait paſſé la ligne droite, au lieu de trois qu'il y auroit naturellement; mais alors on ne fait aucune attention au temps écoulé; & le nombre des conditions *étant toujours égal à celui des indéterminées*, l'orbite rectiligne ainſi *déterminée différera* peu de l'orbite parabolique dans ces points, & il y aura ſeulement une différence de temps entre le moment ou le corps ſeroit dans ce point de l'orbite rectiligne, & celui où il eſt dans le point correspondant de l'orbite parabolique; mais cette différence de temps ſera du même ordre que les quantités qu'on néglige. (Voyez le Tableau des Opérations à faire,) D'ailleurs ſi cette ſuppoſition paroiſſoit *précaire, j'ai donné un moyen de s'en* paſſer. L'on voit donc que l'on pourra, à l'aide de ce moyen, ſe contenter de trois obſervations bien faites, qu'il ſuffira d'avoir les autres à peu près; & ſi l'on croit pouvoir ſe paſſer de cette précaution, alors il faudra quatre obſervations exactes; mais il vaudra mieux dans la pratique, & pour des raiſons tirées, tant de la difficulté d'obſerver que de la ſûreté de la méthode, faire en ſorte de n'avoir beſoin que de trois obſervations exactes. On aura donc par cette méthode une valeur des élémens de l'orbite parabolique, qui ne différeront de la vérité que d'une quantité inappréciable par les obſervations; & c'eſt tout ce qu'on peut déſirer, puiſque l'orbite parabolique n'eſt pas elle-même une orbite rigoureuſe.

Quoiqu'il y ait très peu de Comètes pour les quelles ou puiſſe déduire l'orbite elliptique d'après une ſeule apparition, cependant il ſeroit bon d'avoir un moyen

de connoître dans quel cas on peut déterminer cette orbite; & dans les autres cas, quelle eſt l'ellipſe la moins alongée qui puiſſe cadrer avec les obſervations, & la période la plus courte que puiſſe avoir la Comète; c'eſt ce que j'ai exécuté. Il feroit encore utile de ſavoir, dans le cas où l'on auroit deux Comètes qui ſe muſſent dans deux ellipſes très alongées; s'il y aura des parties de l'orbite où elles pourront ſe troubler par leur gravitation réciproque. La ſolution directe eſt impoſſible par l'analyſe connue, dans le cas où les deux ellipſes ſont fort alongées, parce qu'elles ne peuvent être confondues avec la parabole que pour de petits espaces de temps, & que la ſolution en ſéries du Problème de Képler n'eſt convergente que lorsque les ellipſes ſont peu excentriques. J'ai donc cherché une ſolution indirecte, & celle que je propoſe me paroît ſuffiſante pour la pratique. Toutes ces méthodes n'ont d'autre mérite que d'etre analytiques; ce qui les rend auſſi ſures que peuvent l'etre des méthodes approchées; on peut même les regarder comme ſûres abſolument, puis qu'il y a, lors qu'on cherche ces approximations ſucceſſives, des moyens de reconnoitre l'erreur, lors qu'il y en a, & de la corriger.

J'ai cru devoir joindre à cet Eſſai un morceau ſur les perturbations des Comètes, quoique l'Académie n'ait rien demandé ſur cet objet. Je l'ai traité avec le plus de généralité que je l'ai pu; & les Méthodes que j'expoſe ſont telles que pourvu que les forces qui agiſſent ſur une Comète, & les diſtances des corps qui exercent ces forces, ne ſoient pas en même temps comparables entr'elles, on aura le mouvement de la Comète. Une de ces méthodes eſt nouvelle; l'autre a déjà été publiée (par M. le Marquis de Condorcet) dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1769. J'ai ajouté ſur l'une & l'autre Méthodes, pluſieurs réflexions qui tendent à en prouver la légitimité & l'uſage. On voit dans la première, que l'on peut, dans tous les cas, réduire à quinze le nombre des équations aſtronomiques que les perturbations exigent; & que les autres équations qui ont lieu pour des approximations plus exactes, ſont dépendantes de celles-là.

Dans cette partie je n'ai cherché que des réſultats généraux, & même dans la première qui étoit le principal objet de cet Eſſai; & pour ce qui regarde la détermination de l'orbite parabolique, j'ai cru devoir m'arrêter au point où il ne reſte plus qu'à opérer ſur des fonctions numériques, où à faire des éliminations linéaires. Mais pour ne point interrompre les raiſonnemens ſur lesquels la méthode eſt fondée, par le détail d'opérations trop longues, j'ai renvoyé à la fin un Ta-

bleau général de toutes les opérations à faire pour trouver, soit l'orbite parabolique, soit dans quel cas l'orbite elliptique peut être connu par une seule apparition.

Je n'ose me flatter d'avoir répondu aux vues de l'illustre Société à qui j'ai l'honneur de présenter cet Essai; & je serai content si elle trouve qu'il puisse être de quelque utilité pour le progrès d'une des Théories les plus difficiles de l'Astronomie physique.

J'ai ajouté à la pièce deux appendices; le premier sur quelques cas particuliers où les observations de la Comète sont très incertaines, ou l'on n'en peut avoir qu'un très petit nombre qui soient complettes. Le second renferme une méthode par laquelle on évite dans les *solutions approchées* des équations différentielles, une difficulté qui étoit commune à toutes les solutions *données jusqu'ici de ce Problème.*

SUR LES COMÈTES.

ARTICLE I.

Formules rigoureuses pour le mouvement d'une Comète dans une orbite parabolique.

SUPPOSANT d'abord l'orbite connue; supposant que l'origine des ordonnées est au foyer; que la distance du foyer au sommet est a, son équation sera (Voyez dans la Table d'équations, n°. 1) l'équation (1)

Si maintenant on veut rapporter cette équation à l'Ecliptique, on aura, z étant la perpendiculaire menée du lieu où est la Comète sur l'Ecliptique, $Y = bx + cy$, $X = by - cx$, & $z = ex + fy$; ce qui, au lieu de l'équation ci-dessus, donne les deux équations (2) (3).

Si on obſerve une Comète il eſt clair que ſuppoſant que le plan des x & y ſoit celui de l'Ecliptique, & que la ligne des x ſoit celle qui paſſoit par les abſides de l'orbite terreſtre dans un temps donné, on aura, (en ſuppoſant qu'on a obſervé la Comète, $z = Ay + B$, & $x = Cy + D$. A, B, C, D ſont des quantités données par l'obſervation, en ſuppoſant connues la diſtance de la Terre au Soleil, & la longitude & la latitude du lieu de l'obſervation; & cela ſans avoir beſoin de connoître la parallaxe. En effet, tout ce que je viens de dire étant une fois connu, on peut faire cette propoſition: L'ordonnée de l'orbite, plus ou moins la diſtance à l'axe du point donné où le rayon viſuel coupe l'Ecliptique, eſt à l'abſciſſe plus ou moins la diſtance du foyer au point où la perpendiculaire menée à l'axe par ce point de rencontre, coupe cet axe, comme le ſinus de la *longitude rapportée à la ligne* des abſides de la Terre, eſt au coſinus de la même longitude; & de même z eſt à la projection ſur l'Ecliptique, comme le ſinus de latitude eſt à ſon coſinus: & cette projection eſt à l'ordonnée de l'orbite, moins la diſtance du point donné ſur l'Ecliptique à l'axe, comme le ſinus total eſt au ſinus de la longitude.

Comparant ces équations avec l'équation (3), on aura $Ay - fy - eCy + B - eD$, ou $y = \frac{eD - B}{A - f - eC}$, & pour abréger $y = \frac{Ee + F}{Ge + f + H}$ & $x = \frac{Ie + Kf + L}{Ge + f + H}$. On ſubſtituera ces valeurs dans l'équation (1), & on aura l'équation (4) où les lettres majuſcules déſignent des quantités connues, mais différentes de celles ci deſſus.

Si on prend trois obſervations, on aura trois équations ſemblables, en mettant ſeulement des lettres G, H, I, K, L, M, & N, P, Q, R, S, T, au lieu des A, B, C, D, E, F.

Mais comme on a réellement quatre variables $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{b}$, e & f, il faut chercher une quatrième équation. Pour cela, on remarquera que les aires parcourues ſont proportionnelles aux temps. Si donc on appelle t le temps paſſé entre les deux premières obſervations, & t' celui entre la ſeconde & la troiſième, on aura.

$$t = V.\tfrac{2}{3}\left(\overline{X' + a}.\ Y' - \overline{X + a}.\ Y\right) + \tfrac{1}{2}XY - \tfrac{1}{2}X'Y'.$$

$$t' = V.\tfrac{2}{3}\left(\overline{X'' + a}.\ Y'' - \overline{X' + a}.\ Y'\right) + \tfrac{1}{2}X'Y' - \tfrac{1}{2}X''Y''.$$

D'où éliminant V, j'ai une équation qui contient les termes XY, X, Y, $X'Y'$, X', Y', $X''Y''$, X'', & Y''; & par conſéquent en mettant pour Y & X leurs valeurs en x, y, x', y', x'', y'' qui ſont les valeurs correſpondantes, on aura des équations qui ne

contiendront que bb, cc, bc, ac, & ab; & si nous y mettons pour les x, y, x', y', x'', y'', leurs valeurs en quantités données & dépendantes de l'observation, & contenant e, f, on aura le coëfficient de b^2 qui ne contiendra pas f^2, non plus que celui de c^2; on aura donc une équation (5).

Comparant maintenant les trois équations semblables à celle marquée (4), nous verrons d'abord que si on élimine f^2 de deux de ces équations, on aura une équation qui contiendra b^4 pour plus haute puissance de b; a^4 pour plus haute puissance de a; & c^3 pour plus haute puissance de c: Maintenant les termes qui multiplient f, étant du quatrième degré, mais ne contenant pas de puissance de c au-delà de c^2, on aura une équation en e qui contiendra a^8, b^8, & seulement c^5, & où e sera au troisieme degré par la comparaison des trois équations (4). Mais comme il faut trois de ces équations, on en aura une seconde où il faudra employer l'équation (5); alors les coëfficiens de f, après une première comparaison, ne contiendront que b^3 pour b, a^3 pour a, & c^4 pour c; & par conséquent on aura une équation du troisième degré en e, ne contenant que b^7, a^7 & c^6; ensuite pour avoir la troisième, on multipliera l'équation qui contient b^4 & c^2 au coëfficient de f par f; éliminant f^2, on aura une équation qui contiendra au coëfficient de f, a^6, b^6 & c^4, & c^5 dans le reste, & une équation en c du quatrième degré, qui contiendra a^{10}, b^{10}, & c^7.

Maintenant c'est e qu'il faut éliminer, & j'ai trois équations, une du degré 4, & deux autres du degré 3. Comparant pour en avoir trois du 3, j'en aurai une où a montera au 17^e. ainsi que b & c au 13^e. Les comparant ensemble, j'en aurai une du second degré qui contiendra a^{24}, b^{24} & c^{20}, & une autre qui ne contiendra que a^{15}, b^{15}, & c^{11}, & j'en aurai par comparaison une du même degré qui contiendra a^{22}, b^{22}, & c^{17}; ce qui m'en donnera du premier, où a & b seront du degré 39, & c du degré 31; une où a & b seront du degré 37 & c du degré 28; & une enfin où a & b seront du degré 52 & c du degré 39: donc comparant, on aura entre a, b, c deux équations, une où b & a seront du degré 76, & c du degré 59, l'autre où a & b seront du degré 89 & c du degré 67. On voit de là que quoique la forme particuliere de ces équations les ait rabaissées, la méthode rigoureuse & directe est ici impraticable; je vais donc en proposer une autre.

ARTICLE II.

La queſtion propoſée ne peut avoir par ſa nature qu'une ſolution réelle. Ainſi il faut, ou que l'équation en a n'ait qu'une racine réelle, ou bien qu'elle ſe rabaiſſe dans l'élimination, en ſorte que l'on ne puiſſe avoir ni $\frac{c}{b}$ en $\frac{a}{b}$, ni b par une équation linéaire; car alors $\frac{a}{b}$ peut être réel, & les équations en $\frac{c}{b}$ ou en b n'avoir point de racines réelles qui répondent à ces valeurs de a.

Je ſuppoſe maintenant que nous ayons une quatrième obſervation; elle doit, dans l'hypothèſe, ſe rapporter à un point fort peu différent de ceux qui appartiennent à la parabole que donnent les premières obſervations; en ſorte qu'en ajoutant aux valeurs données par l'obſervation des quantités inconnues très petites, on aura deux nouvelles équations de la forme des équations (4) & (5), & qui contiendront deux nouvelles variables u & z. Suppoſons que l'on ait, à l'aide de toutes ces équations éliminées, toutes les variables hors z, il eſt aiſé de voir que z & u ne peuvent avoir qu'une valeur réelle, à moins que le degré de leur équation ne s'abbaiſſe, & que l'on n'ait ou $\frac{a}{b}$, ou $\frac{c}{b}$, ou par des équations non linéaires, & telles que pour des valeurs réelles de z ou u, les autres quantités ſoient imaginaires; d'où il ſuit qu'en général ſi je néglige les puiſſances de u & de z au deſſus de la première, j'aurai une véritable valeur approchée de u & de z, à des quantités de l'ordre u^2, ou z^2 près, qu'il n'y a d'exception que pour le cas que je viens de remarquer & pour celui où l'équation en z ou en u, auroit des racines égales. Dans ces deux cas, on auroit un réſultat fautif, en prenant cette valeur de z ou de u, & de plus on auroit dans le premier, l'inconvénient d'avoir à reſoudre des équations d'un degré ſupérieur pour avoir a & b: il peut arriver encore que les obſervations donnent z & $u = o$; d'où il ſuit que dans tous ces cas on ne pourra avoir $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, ni b, qu'à des quantités près de l'ordre u ou z. Mais comme on ne peut les avoir d'une manière plus approchée, puiſque ces quantités déſignent l'erreur poſſible des obſervations, il n'y aura aucun inconvénient à employer cette méthode. Le ſeul cas où il faudroit une nouvelle opération, ſeroit celui où l'on auroit $\frac{a}{b}$ ou $\frac{c}{b}$ par une équation non linéaire, contenant u & z; dans ce cas, il faut prendre une nouvelle obſervation, à moins que l'équation en z & $\frac{c}{b}$ ne fût d'un degré peu élevé, parce que dans ce cas la valeur trouvée pour u ou z, ne peut rendre $\frac{a}{b}$ imaginaire, quoiqu'il doive être réel. En effet cette équation en z & $\frac{a}{b}$, dans laquelle on mettroit pour z ſa vraie valeur, ne

devant avoir qu'une racine réelle, il faut, ou qu'elle ſoit d'un degré impair, & elle a une racine réelle néceſſairement ; ou qu'elle ſoit d'un degré pair, mais avec un nombre pair de racines égales ; donc différenciant & éliminant dans ce cas, on aura a par une équation d'un degré impair; donc, &c.

On voit donc que l'on trouvera toujours u & z par une équation linéaire, en faiſant l'élimination ; ainſi le Problème ſe trouve reduit à des éliminations d'équations numérales, & par conſéquent à des opérations qu'on peut regarder comme abſolument élémentaires.

Mais il eſt presque impoſſible de ſe ſervir de cette méthode dans la pratique, à cauſe de l'énorme complication de calculs qu'elle exige ; ainſi je vais en chercher une plus ſimple, ce ſera celle de Newton, mais rendue analytique & ſusceptible de devenir auſſi approchée qu'on voudra.

ARTICLE III.

Je ſuppoſe qu'on ait pris trois obſervations de Comètes aſſez voiſines les unes des autres, pour que ſans une grande erreur on puiſſe ſuppoſer que cette partie de l'orbite eſt une ligne droite, on aura pour l'équation de cette ligne,

$$x + ay + b = o.$$

$$z + ex + fy = o.$$

De plus, on a par chaque obſervation, comme dans l'article premier,

$$x = Ay + B.$$

$$z = A'y + B'.$$

Donc on aura

$$\underline{A + ay + b} + B = o.$$

$$\overline{A' + ea + fy} + B + eB = o.$$

D'où éliminant y, j'aurai l'équation (6) où les lettres majuscules A & B ſont différentes de ce qu'elles ſont ci-deſſus, & l'on aura à cauſe des trois obſervations, trois équations ſemblables; & comme il n'y a que trois obſervations & quatre indéterminées, on ſuppoſera le mouvement uniforme comme il doit l'être dans une ligne droite, & l'on aura $t : t' :: y' - y : y'' - y'$, ce qui donne $y + ay' + B'y'' = o$; & mettant pour y, y', y'', leurs valeurs $\frac{B' + eB}{A' + eA + f}$, $\frac{B'_{,} + eB_{,}}{A_{,} + eA'_{,} + f}$, $\frac{B'_{,,} + eB_{,,}}{A'_{,,} + eA'_{,,} + f}$;

ce qui me donne une équation (7), & c'eſt de ces quatre équations qu'il faudra tirer les valeurs de a, b, e, f: or il eſt aiſé de voir qu'éliminant a, b & f, on aura e par une équation du onzième degré.

Maintenant pour avoir une valeur approchée de e, on ſuppoſera que l'on ait une quatrième obſervation, de laquelle on tirera par la même méthode employée dans le précédent article, deux équations qui contiendront deux très petites quantités u & z, en ſorte que le Problème ſera réduit aux trois équations (8), (9), (10), où les lettres A, B, &c. ne déſignent pas les mêmes quantités que dans les équations précédentes.

Il faut obſerver par rapport à ces équations qu'il peut arriver que cherchant à éliminer, on trouve une valeur de e indépendante de f, ou ſeulement e en f, en ſorte que f puiſſe reſter quelconque. Lorſque cela arrive, les obſervations qu'on a choiſies ne ſuffiſent pas pour réſoudre le Problème, & il en faut choiſir d'autres, ſi on cherche e par la ſolution de l'équation (8). Mais ſi on cherche e par l'élimination des équations (8), (9) & (10), & en employant une quatrième obſervation, alors il n'y a qu'à ſuppoſer que f reſte le même pour la quatrième obſervation, c'eſt-à-dire, faire u ou z zéro à volonté, & ne prendre que deux équations.

Il peut arriver encore, ou qu'on ait u & z égaux à la fois à zéro, ce qui obligeroit à recourir à une nouvelle obſervation, ou bien que l'on ait pour u & z pluſieurs racines ou égales, ou différant entr'elles ſeulement de quantités de l'ordre u^2, z^2; & comme ici les u & z ne ſont pas du même ordre que l'erreur des obſervations, la méthode de l'article précédent ſeroit fautive: ainſi on doit examiner ces valeurs de u & z pour la méthode générale, pour les équations déterminées, & par conſéquent il faut que les valeurs de u, z ſoient très petites, & que la valeur de e qui en nait, ſoit telle que l'appelant A, faiſant $e = A + e'$ dans l'équation en e, & négligeant e'^2, e' ſoit de l'ordre de u^2 ou z^2; ſans cela il faudra ou faire entrer dans le calcul le ſecond terme de l'équation en u on en z, ou bien mettre dans la formule rigoureuſe, au lieu de u & de z, leur première valeur approchée, plus de petites quantités u', z', afin d'avoir une ſeconde valeur plus approchée de u & de z. Je donnerai dans la ſuite de ce Mémoire une méthode pour les approximations ſucceſſives.

Lorſqu'on connoîtra e & f, on fera dans les trois équations de la forme de l'é-

quation (4) & dans l'équation (5) $e = A + u$; $f = B + z$, & on aura quatre équations qui contiendront quatre variables $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, u & z, qui sont des quantités très petites; donc éliminant les deux premières, on aura deux équations linéaires pour u & z, & des valeurs approchées pour toutes ces quantités, & en répétant l'opération des valeurs aussi approchées qu'on voudra; mais il suffira qu'elles le soient à une valeur près comparable à l'erreur des observations.

Telle est la méthode analytique la plus simple que j'aie pu trouver pour l'orbite parabolique; on en trouvera peut-être de plus simples encore, en employant les mêmes principes, mais en prenant d'autres coordonnées que les coordonnées orthogonales que j'ai préférées ici. Au reste je donnerai dans la suite, Article V, des moyens de simplifier celle-ci.

ARTICLE IV.

De l'Orbite elliptique.

Si l'on veut avoir la véritable orbite d'une Comète, on supposera d'abord au lieu de l'équation (1) l'équation (11) où a est la même chose que pour l'orbite parabolique, & où p est le rapport de la distance du foyer au sommet avec le demi-grand axe de l'ellipse. Cela posé, il est aisé de voir que si je prends cinq observations, & que je conserve les mêmes dénominations que dans l'article ci-dessus, j'aurai cinq équations pour cinq observations qui seront toutes cinq de la forme (12) & où il faudra observer que les termes F, E, C, peuvent contenir p & p^2.

Cela posé, on pourroit faire évanouir $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, e, f, & avoir une équation en p, qui comme p est très petit, peut être regardée comme une équation linéaire.

Supposons p donné par cette équation, il est aisé de voir que si l'orbite est sensiblement parabolique, p est de même ordre que l'erreur qu'on peut commettre dans les observations, & réciproquement. On conclura de l'ordre de la valeur de p & de la quantité dont les observations peuvent être fautives, si l'on peut calculer l'orbite comme parabolique, & si on choisit les observations les plus éloignées qu'on ait pu avoir dans une seule apparition, on verra aussi par le degré de la valeur approchée de p,

ſi on peut tirer d'une ſeule apparition quelque connoiſſance ſur l'orbite elliptique, & par conſéquent prédire ſon retour. En effet, ſi on connoiſſoit p exactement, on auroit exactement le temps d'une révolution; donc augmentant la valeur trouvée de p, que je ſuppoſe plus grande que l'erreur des obſervations d'une quantité égale à cette erreur, on verra ce qui en peut réſulter de changement pour le temps d'une révolution, & à combien de temps près, on peut prédire le retour.

Le calcul ci-deſſus pour déterminer p, étant trop compliqué, il faudra prendre la méthode de l'article précédent, regarder trois obſervations comme étant en ligne droite, trouver e & f pour cette ſuppoſition, ſubſtituer dans les cinq équations ci-deſſus $e+u$, $f+z$, & on aura cinq équations contenant $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, u, z & p, où u, z & p ſont très petits; on éliminera $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{b}$; ce qui, comme les équations ne ſont que du ſecond degré, eſt aſſez facile, & on aura trois équations en p, z & u. Comme z & u peuvent être beaucoup plus grands que l'erreur des obſervations, on voit qu'en négligeant les quarrés de ces quantités, on peut ne pas avoir l'orbite d'une manière aſſez approchée, on ſeroit ſouvent obligé d'avoir recours à des approximations ſucceſſives; ce qui conduit à de très longs calculs, & à beaucoup de ſubſtitutions. On pourroit cependant abréger beaucoup ce travail, en employant les formules ſuivantes, qui peuvent ſervir également aux équations en e & f de l'article précédent. Je vais donc les donner d'abord pour cet article, & en ſuite pour celui-ci.

Soient d'abord P & P' deux équations en e & en f; je ſuppoſe que e déſigne une valeur approchée de e, & que $e + de + dde + d^3 e$ &c. ſoient la vraie valeur, de même que f ſoit une valeur approchée, & $f + df + d^2 f + d^3 f$ &c. la vraie valeur, j'aurai après la ſubſtitution l'équation (13) & une équation ſemblable en P'; or ces deux équations me donneront pour déterminer de & df, $d^2 e$ & ddf; $d^3 e$ & $d^3 f$, &c. les ſuites d'équations ſuivantes (A), ce qui donne les valeurs réſultantes (B). L'on remarquera qu'il eſt aiſé de continuer ces formules (B,) & qu'en général on aura,

$$d^n e = \frac{N\frac{dP'}{df} - N'\frac{dP}{df}}{\frac{dP}{df}\,\frac{dP'}{de} - \frac{dP}{de}\,\frac{dP'}{df}}, \quad \& \ldots\ d^n f = \frac{N\frac{dP'}{de} - N'\frac{dP}{de}}{\frac{dP}{de}\,\frac{dP'}{df} - \frac{dP}{df}\,\frac{dP'}{de}};$$

où N & N' ſont les coëfficiens de a^n, dans ce que devient P & P', et ſi on met au lieu de e & f, $e + a\,d\,e + a^2\,d^2 e + a^3\,d^3\,e$, &c. $f + a\,d\,f + a^2\,d^2 f + a^3\,d^3\,f$ &c. on aura donc les valeurs véritables de e & de f par les équations (C); & pour avoir dans ces équations les coëfficiens exprimés par de petites Lettres, on remarquera que ces coëfficiens ſont toujours

$$\frac{N\dfrac{dP'}{df} - N'\dfrac{dP}{df}}{\dfrac{dP}{de}\,\dfrac{dP'}{df} - \dfrac{dP'}{de}\,\dfrac{dP}{df}}$$ pour la première ſérie, &

$$\frac{N'\dfrac{dP}{de} - N\dfrac{dP'}{de}}{\dfrac{dP}{df}\,\dfrac{dP'}{de} - \dfrac{dP'}{df}\,\dfrac{dP}{de}}$$ pour la ſeconde; & N étant

tel que ſi n eſt le degré où montent les A, B, C, & A', B', C', &c. dans le terme dont on cherche le coëfficient, on ait $N = \dfrac{d^n P}{d\,e^m\,d\,f^{n-m}} \times \dfrac{n.n.-1\ldots m+1}{1.2\ldots m.\,1\,2\ldots n}$, m étant le degré où montent les A, B, C, &c. coëfficient qu'il faut multiplier encore par celui de $A^p\,A^{p'}.\,B^q\,B^{q'}\,C^r\,C^{r'}$ &c. dans $\overline{A + B + C\,\&c.}^{\,p+q+r} \times \overline{A' + B' + C'\,\&c.}^{\,p'+q'+r'}$. $p + q + r$ &c. $= m$, $p' + q' + r'$ &c. $= n - m$.

Ce que viens de dire pour deux variables, aura lieu également pour un plus grand nombre. En effet, on voit que les équations (D) auront la même forme, & que l'on aura en général, en appelant, e, f, g, h, &c. ces variables, & P, P', P'', P''', &c. ces équations, une ſérie d'équations (E) où les A, B, C, &c. ſont indépendans de n, où A', B', C', &c. ſont ce que devient A, B, C, en mettant f pour e & e pour f, ou M' eſt ce qui eſt M, en y mettant P' pour P; & l'on aura M comme on a eu N dans le cas de deux variables. Au reſte, on

voit que cette méthode auroit le même avantage si P étoit une fonction transcendante, & qu'il suffit de connoître une valeur approchée.

Si au lieu de ces variables, on avoit encore une quantité très petite p, qui entrât dans l'équation, on auroit alors l'équation de la forme $P + Q P + R p^2 + S p^3$ &c. $= 0$. On feroit dans P, Q, &c. la même substitution que ci-dessus; & de plus $p = d q + d^2 q + d^3 q$ &c. et si l'on appelle $P + P_{,} + P_{,,}$ ce que devient P après la substitution, en ordonnant la suite par rapport à l'ordre des différences, & que $Q + Q_{,} + Q_{,,}$ &c. désigne la série des Q; $R + R_{,} + R_{,,}$ &c. celle des R, l'équation totale sera ordonnée comme dans l'équation (F). D'où l'on voit que l'on aura également une suite d'équations *de la forme* . . . . . $M + A\, d^n e + B\, d^n f$ . . . . $Q\, d^n q = 0$; pour lesquelles on trouvera de la même *manière les valeurs* de M. Je ne pousserai pas plus loin ces formules, qu'il est, d'après ce que j'ai dit, très facile de continuer au besoin pour tel degré où l'on voudra s'arrêter. On sent ici que ce doit être seulement lorsque les $d^n f$, $d^n e$ &c. seront des quantités de même ordre que l'erreur des observations.

Cela posé, si on trouve que p soit inappréciable par ces observations, on ne saura point *quelle espèce d'ellipse on aura*, mais il y a des limites entre lesquelles p peut être renfermé, & il peut s'étendre depuis zéro jusqu'à une quantité qu'il faut chercher à déterminer. Pour cela on pourroit supposer ces dix quantités données par l'observation, égales à ce que donne l'observation, plus une petite quantité; ensuite on chercheroit la valeur de p dans cette hypothèse, en négligeant le quarré de ces petites quantités; & alors la plus grande valeur que p pourroit avoir, *les petites quantités* restant inobservables, seroit la limite de p. Mais cette méthode est trop longue, & en voici une autre plus simple.

Supposons que l'on connoisse e, f, a, par les méthodes ci-dessus, & que laissant p indéterminé, on prenne une nouvelle observation choisie de manière que les erreurs soient le plus sensibles qu'il est possible, on ajoutera une très petite quantité aux angles donnés par l'observation, & l'on aura une équation plus simple que par l'article précédent, puisqu'au lieu de dix termes *multipliés* par ces petites erreurs de l'observation, on n'en aura que deux à calculer; & l'on peut même, au lieu d'une nouvelle observation, prendre une des cinq observations à son gré, pourvu qu'elles soient assez éloignées les unes des autres.

Ou bien ce qui seroit encore plus court, on supposera l'orbite parabolique, & pour l'observation la plus éloignée du périhélie qu'on ait pu avoir, on con-

noîtra l'arc parcouru ; on cherchera par la théorie le même temps, en ſuppoſant cet Angle le même, & l'orbite elliptique, mais dans ce même plan & la même valeur de a; on retranchera du temps trouvé ainſi, le temps que donne l'obſervation, et il faudra que p ſoit tel que cette différence ſoit imperceptible; donc prenant A valeur de p, telle que la différence de ces temps ſoit très ſenſible, on aura p entre zéro & A, & l'orbite ſera une des ellipſes compriſes entre la parabole & l'ellipſe, où le rapport de la diſtance du foyer au ſommet eſt A. Si une Comète étoit revenue pour la ſeconde fois, & qu'elle eût les mêmes élémens, alors le temps d'une révolution étant connu, on auroit p ſans beaucoup de difficulté.

ARTICLE V.

D'une autre manière de déterminer les Orbites par les obſervations.

Si on fait $\frac{x + A}{y + Q} = x'$, & $\frac{ex + fy}{y + Q} = y'$; on aura entre ces variables x', y', une équation qu'on pourra regarder comme celle de l'orbite, les x', y' étant donnés par l'obſervation.

On tire de la première, $x = x'y + x'Q - A$, & ſubſtituant dans la ſeconde cette valeur de x, on a $ex'y + ex'Q - eA + fy - yy' - Qy' = o$, & $y = \frac{eA - ex'Q + Qy'}{ex' - y' + f}$, & $x = \frac{Ay' + fQx' - fA}{ex' - y' + f}$, ſi je ſubſtitue ces valeurs dans l'équation en x & y (4) qui a tous ſes termes, il eſt aiſé de voir qu'en l'ordonnant par rapport aux quatre quantités x', y', A & Q qui varient à chaque obſervation, elle aura vingt neuf termes; ce qui conduiroit à des opérations très compliquées.

Mais ſuppoſons l'orbite rectiligne pendant un petit eſpace, alors ſi $x + ay + c = o$ eſt l'équation de cette orbite, nous aurons ici $Ay' + aQy' + \overline{f - ae}\, Qx - \overline{f - ae}\, A + cex' - cy' - cf = o$, que je mettrai ſous la forme

$Ay' + aQy' + a'\,\overline{Qx' - A} + a''x' - a'''y' + a^{IV} = o$. Prenant cinq ob-

obſervations pour leſquelles j'aie A, Q, x, y, & pour l'une deſquelles ſeulement je ſuppoſerai que la quantité x' eſt augmentée d'une très petite quantité a'', z & $Qx + A$ de la petite quantité z, j'aurai cinq équations (A) Tables, N°. 3, où excepté les a & z, tout eſt donné par l'obſervation. Je fais diſparoître a^{IV}, & j'ai les quatre équations (B). Eliminant a, j'ai les trois équations (C) ; & éliminant a', les deux équations (D), & enfin les équations F; mais $\frac{a''}{-a'''} = e$; donc $e = \frac{-A'' + B''z}{A + Bz}$, & négligeant les ſecondes puiſſances

$$e = \frac{-A''}{A} + \frac{BA''}{A^2}z;$$

Pour avoir f, je prendrai ce que deviennent les valeurs précédentes, en mettant les r pour les s, & réciproquement dans la valeur de a, & j'aurai a'; je prendrai enſuite les mêmes valeurs, en mettant q pour t & réciproquement dans la valeur de a'', & j'aurai a; maintenant $f = ae$, & $f - ae = a'$, ce qui me donne f, & une équation pour déterminer z. Connoiſſant e & f à peu-près, je prends l'équation (2) N. 1. des Tables.

Je vois que j'ai quatre équations où les b^2, bc, c^2, ac, ab, a^2 ont pour coëfficiens des fonctions qui contiennent f & e, & qui ſont du ſecond degré. Je prends les différences première & ſeconde de ces fonctions qui ſe trouvent être des nombres, & j'ai en éliminant $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$ deux équations numerales de la forme $A + B\,de$, &c. $+ C\,df$, &c. Voyez l'article précédent.

Mais cette méthode peut paroître encore trop longue ; & voici un dernier moyen de la ſimplifier ; nous aurons facilement a & c, comme nous avons eu e & f, imaginons maintenant que la ligne dont l'équation eſt $x + ay + c = o$, eſt à très peu-près pour cette valeur de x & de y la tangente de l'orbite parabolique, nous aurons $\overline{x - b'y}^2 = 4\,(a'x + a'b'y) + 4a'^2 \ldots$ qui eſt l'équation I où pour $\frac{c}{b}$ & $\frac{a}{b}$ j'ai mis b' & a'; j'ai de plus $x + ay + c + zy + z' = o$; d'où $dx + ady + z\,dy = o$, & $\overline{x - b'y}\,.\,\overline{dx - b'dy} = 2a'\,.\,dx + b'dy$; $\overline{x - b'y} \times (-\overline{a + z} - b')$ $= 2a'(-\overline{a + z} + b')$; $a' = x - by\,.\,\frac{a + z + b'}{2\,(a + z - b')}$; donc j'aurai

b' par une équation du quatrième degré ; la résolvant, j'aurai $b' = m \times \overline{b + z}$ & $a' = n' . a + z$. Je substituerai dans les trois équations de la Table, ces valeurs, en y faisant $z' = o$, $z = o$; & j'aurai en a, b, e & f trois équations où je ferai $a = a + da + d^2a$, &c. $b = b + da + dda$, &c. $e = e + de + d^2e$, &c $f = f + df + d^2f$, &c. & où j'aurai des valeurs de a, b, e, f, & par conséquent de a' & b' aussi approcheés que je voudrai ; ou bien, on prendra dans la valeur de b', $b = m . \overline{b + z'}$, où m est le coëfficient de z dans la valeur de b' réduite en série ; on substituera dans les quatre équations les valeurs de a' & de b' en $a + z$, & $b + z$, & on aura quatre équations auxquelles on pourra appliquer les méthodes de l'article précédent. Nous observerons ici deux choses ; 1°. que l'on prendra pour déterminer l'orbite linéaire, cinq observations très voisines l'une de l'autre sans aucun inconvénient, & qu'on n'en conservera qu'une seule qui sera la première des trois servant à la détermination de l'orbite parabolique & celle qu'on comparera à la ligne droite. 2°. que l'hypothèse que je fais ici est légitime ; en effet je suppose que j'aie une équation $a + b\,x + c\,x^2$ &c. $= o$, & que je sache que $x = m\,z$, z étant très-petit, il est clair que j'aurai l'équation $a + b\,m\,z + c\,m^2\,z \ldots\ldots + m^n\,z^n = o$; & divisant par m^n,

$$\frac{a}{m^n} + \frac{b}{m^{n-1}}\,z + \frac{c\,z^2}{m^{n-2}} \ldots\ldots = o;$$ donc j'aurai négligeant z^2, $z = -\frac{a}{bm}$.

Donc puisque m est grand lorsque x l'est, & que $\frac{-a}{b}$ l'est aussi, z sera très-petit selon l'hypothèse. Donc cette méthode sera exacte, à moins que z & par conséquent x n'ait deux valeurs de même ordre, mais cela ne peut arriver ici, parceque nécessairement il ne doit y avoir qu'une seule valeur réelle.

Dans le dernier article, on voit que j'ai supposé qu'il y avoit quatre observations exactes ; si on ne veut pas employer cette hypothèse, soit à cause des difficultés de pratique, soit de crainte que l'orbite rectiligne ainsi trouvée ne diffère trop de l'orbite parabolique, même dans cette petite partie, on peut se contenter de trois observations regardées comme exactes ; alors on aura une nouvelle inconnue très-petite z' qu'on regardera comme indéterminée, & on la déterminera par cette condition, que prenant les trois observations exactes, & appelant Y, Y', Y'', les ordonnées repondantes à ces observations, & T, T', les temps écoulés, on ait $Y - Y' . Y' - Y'' :: T . T'$. Par ce moyen, il est clair que j'ai trois bon-

nes obſervations ſur leſquelles je puiſſe compter, & auſſi bonnes que l'état actuel des inſtrumens & des connoiſſances aſtronomiques permet de les eſpérer, & que j'aie enſuite deux autres obſervations plus incertaines, & dont l'erreur, quoique petite, puiſſe cependant être appréciable par les obſervations, je n'en aurai pas moins, par cette méthode, des déterminations approchées: ainſi elle n'exige, comme celle de Newton, que trois bonnes obſervations.

Toute la difficulté conſiſte à augmenter dans la Table une des quantités obſervées de la petite inconnue z''; ce qui augmente de termes $\Pi\, z'$, $\Pi'\, z'$, &c. les valeurs des indeterminées; & ſubſtituant enſuite ces valeurs dans $T'\,T - \overline{T' + T\,T'} + T\,T'' = o$, on aura z'', & par conſéquent tout ſera déterminé. Or pour avoir Π, Π', &c. il n'y a qu'à (ſi x' eſt la *quantité a qui z'' eſt ajoutée*) differentier *par rapport à x' dans les* valeurs de a ou a', les quantités qui ne ſont *multipliées* ni par, z ni par z', diviſer par $d\,x'$, & multiplier par z''. Je ne crois pas qu'on puiſſe élever aucun doute ſur la légitimité de cette dernière méthode, que j'ai developpée en détail dans un tableau des opérations qu'elle exige, qu'on trouvera à la fin de cet Eſſai.

ARTICLE VI.

Recherches des cas où les Comètes peuvent éprouver des perturbations.

I.

Suppoſons deux aſtres tous deux mus dans des ellipſes, & que l'on connoiſſe la diſtance où la perturbation doit être inſenſible, on prendra l'équation de chaque ellipſe, on aura la diſtance $r = \sqrt{(\overline{x - x'}^2 + \overline{y - y'}^2 + \overline{z - z'}^2)}$, x', y', z', étant les coordonnées, de la nouvelle ellipſe, & on cherchera le cas où r eſt le plus petit; ce qui donne $\overline{d\,x + d\,x'}\,.\,\overline{x - x'} + \overline{d\,y - d\,y'}\,.\,\overline{y - y'} + \overline{d\,z - d\,z'}\,.\,\overline{z - z'} = o$; mais on a y en x & y' en x', z en x & z' en x'; ainſi on aura une fonction $A\,d\,x + B\,d\,x' = o$. Maintenant on aura le temps écoulé pour le corps M depuis ſon périhélie, proportionnel à l'aire; celui du corps M' pris auſſi depuis ſon périhilie, proportionnel auſſi à l'aire; & ſoit connue la diſtance des périhélies, on a le temps pour M égal au temps pour M' plus

cette distance ; donc différentiant, les différentielles des deux aires prises depuis le périhélie, seront égales ; donc on aura une nouvelle équation $A'dx + B'dx' = o$, & par conséquent $A'B - B'A = o$, équation en x & x' seuls, & équation algébrique. Si maintenant on avoit une nouvelle équation entre x & x' aussi algébrique, on auroit en r une équation déterminée, & il ne seroit question que de savoir si r a une valeur réelle plus petite que le point où la perturbation est encore insensible ; mais l'autre équation en x & x', est nécessairement transcendante.

Ainsi pour évitèr cet inconvénient qui demande des calculs immenses, & même de nouvelles méthodes qu'il seroit trop long d'exposer ici, je prendrai l'équation $r^2 = \overline{x - x'}^2 + \overline{y - y'}^2 + \overline{z - z'}^2$; & différentiant, puis substituant les valeurs comme ci-dessus, j'aurai $A\,dx + A'\,dx' = o$, où A contient 1°. x au premier degré ; 2°. à cause de $2y'dy$, un terme où x est au premier degré *divisé* par un radical où x est au second ; 3°. à cause de $x\,dy$, un terme x^2 divisé par le même radical : donc faisant $A = o$, on aura x' par une équation du quatrième degré. Donc puisqu'on sait résoudre cette équation, on aura r égal à une fonction donnée de x', & l'on aura alors pour chaque valeur de x' la plus petite distance d'une orbite à l'autre. *Cela posé, soit a la valeur que doit avoir r, pour que la perturbation ne soit pas sensible*, je fais $x' = o$; si $r > a$, & que faisant $x' = 1$, $r < a$, il y aura entre o & 1, une valeur de x où r sera égal à a. Donc résolvant l'quation $a = X'$, on aura depuis 1 jusqu'à la racine de cette équation qui est entre 1 & o, une valeur de x, où r pourra être plus petit que a ; & comme on peut trouver une valeur au de là de la quelle r soit *toujours* $>$ ou $<$ que a, les limites de la perturbation seront marquées ; ensuite on fera la même chose pour x, ce qui sera plus simple, puisqu'on a x en x' ; on trouvera donc entre quelles valeurs de a & de x', r peut être plus petit que a ; & cela une fois connu, comme on a le temps en x & en x', on verra si pour ces valeurs de x & de x', ce temps peut être le même, & le Problème sera résolu. Jusqu'à présent l'hypothèse qu'on a considérée dans cet article, est celle où l'on connoît l'orbite, mais ici l'orbite est inconnue, du moins lorsqu'il s'agit de deux Comètes, ainsi, dans ce cas, il faut regarder comme indéterminée la quantité (p) article précédent, quantité *qui doit* toujours être très petite ; mais ou pourra rendre la recherche plus simple, en déterminant d'abord à quelle distance de la ligne

des nœuds pour les deux orbites, la diſtance des deux plans eſt plus grande que a, & pour quelles valeurs de x & de x' elle eſt moindre, & ce ne ſera plus qu'entre ces valeurs de x & de x', qu'il faudra réſoudre le Problème de la même manière que ci-deſſus, p étant toujours indéterminé, mais très-petit; ce qui n'aura aucune difficulté dans la plupart des cas, parce que l'hypothèſe de p très-petit, permet d'en négliger les puiſſances ſupérieures, & qu'il n'eſt queſtion que de chercher, au lieu des points où $r < a$, abſolument ceux où r ne peut être plus grand que a, ſans que p ceſſe d'être très-petit.

CHAPITRE II.

Des Perturbations.

ARTICLE I.

Des Quantités qu'on peut négliger.

Je diſtingue trois cas principaux : 1^e^. CAS. La force perturbatrice, ſoit d'une Planète, ſoit d'une Comète, eſt incomparable avec la force principale; dans ce cas, on ſuppoſera les ordonnées du Problème, telles que les donnent les équations aux orbites elliptiques ou paraboliques, en y ajoutant ſeulement une petite quantité dont on négligera les puiſſances ſupérieures.

2^e^. Cas. Celui où l'on peut regarder la Comète comme un ſatellite de la Planète perturbatrice. Ce cas a été conſidéré par M. D'Alembert.

3^e^. Cas. Celui où ſeulement comme le Soleil eſt plus gros que la Comète, la force perturbatrice ne peut être comparable que lorſque la *diſtance* des deux Planètes eſt très petite par rapport à celle du Soleil, & alors cette diſtance des Comètes entre elles peut être regardée comme la quantité dont une des puiſſan-

ces peut être *négligée*. Ce dernier Cas eſt aſſez général, & renferme avec les deux autres, tous ceux où la Comète ne derange pas toute l'économie du Syſtème ſolaire.

ARTICLE II

Du choix des Coordonnées.

Dans le choix des coordonnées pour un Problème d'Aſtronomie phyſique, il faut, à ce qu'il me ſemble, être conduit par le principe ſuivant.

On ſait que quelque cas du Problème des trois corps qu'on ait à traiter, on cherche toujours à avoir une petite quantité égale à une fonction rationnelle & entière de ſinus & de coſinus d'un arc & de ſes multiples; & qu'ainſi pour que la détermination des conſtantes arbitraires ſoit praticable ſans de trop longs calculs, il faut chercher un angle qui ſoit donné par l'obſervation.

La Comète étant donc obſervée de la ſurface de la Terre, il eſt aiſé de voir que les quantités que l'obſervation peut donner, ſont 1°. le temps, 2°. l'angle de la longitude & celui de la latitude; mais ces deux derniers angles ne ſont pas même donnés immédiatement; en effet, il faudroit pour cela connoître la parallaxe de la Comète.

Ainſi, 1°. toutes les fois que la Comète eſt tellement éloigné de la Terre que ſa parallaxe n'eſt pas ſenſible; 2°. toutes les fois qu'on peut connoître la parallaxe a très peu-près par la conſideration de l'orbite parabolique; 3°. toutes les fois enfin que par la comparaiſon de deux obſervations, on pourra conclure cette parallaxe, il eſt aiſé de voir que ſi on prend pour ordonnée la diſtance de la Terre à la Comète projetée ſur l'Ecliptique, l'angle des longitudes & la perpendiculaire menée de la Comète à l'Ecliptique, les trois coordonnées rempliront les conditions demandées.

Si l'on n'a point la parallaxe, mais qu'on puiſſe obſerver la Comète au méridien, cas où la parallaxe n influe pas ſur la longitude, on aura le temps, l'arc de la diſtance en longitude de la Comète au Soleil, & lorſqu'on aura une équation entre ces deux dernières quantitès, il ſera toujours poſſible de déterminer les arbitraires.

Hors de tous ces cas, le Problème devient bien plus compliqué; en effet, il faut combiner le mouvement diurne de la Terre avec les autres mouvemens.

ARTICLE III.

Équations du Problème, & Forme sous laquelle elles doivent se présenter.

Je suppose ici que l'on ait quatre corps, la Terre T, à laquelle on rapporte le mouvement & dont la masse est T; le Soleil S, pour lequel l'angle parcouru est x'' & le rayon vecteur r''; deux Comètes, ou une Comète & une Planète C & C', pour lesquelles les angles sur l'Ecliptique sont x & x', les rayons vecteurs pris de la Terre sont r & r', & les perpendiculaires menées à l'Ecliptique sont z & z'. Nous aurons (Table I.) les six équations 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Le quarré de la distance de la première Comète à la Terre étant f, le quarré de la distance de la seconde Comète à la Terre étant f'; & f'' étant le quarré de la distance des deux Comètes; f''' le quarré de la distance de C au Soleil; f^{IV} la distance de C' au Soleil; & f^{V} le quarré de la distance du Soleil à la Terre. Cela posé, il est aisé de voir que si l'on peut supposer les forces perturbatrices très petites par rapport à la force principale, on aura les équations suivantes: 1°. pour le mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, les équations 7 & 8; 2°. pour le mouvement à peu-près elliptique des deux Comètes rapportées à la Terre, les équations 9, 10, 11, 12, 13, 14, où les quantités Z, Z', R, R', X, X' sont des quantités toujours très-petites, dont on peut négliger certaines puissances. Ces équations ainsi présentées ont l'avantage de ne contenir aucune quantité determinée par l'observation de l'orbite approchée.

ARTICLE IV.

Intégration de ces Equations.

Pour avoir les intégrales approchées de ces équations, on peut choisir deux méthodes, l'une en éliminant & ne laissant que six équations entre les six variables très-petites & le temps; l'autre en intégrant sans éliminer.

I^{re}. Méthode.

Je cherche à avoir en sin t, cos. t, les valeurs de R, R', Z, Z', sin. X, sin. X', & je mets au lieu des angles x & x', les angles $x'' + \lambda$, $x'' + \lambda'$, & alors λ & λ' sont les distances de la Comète au Soleil en longitude prises sur l'Ecliptique.

Je commence par faire évanouir dans les ix dernières équations les trois quantités f'', f^{IV} & f_V; ce qui me donnera trois équations linéaires par rapport aux plus hautes différences, & trois qui contiendront $f''^{\frac{1}{2}}$, &c. Elévant aux quarrés, j'aurai fix équations delivrées de cette irrationalité; & je les délivrerai auffi de l'irrationalité attachée aux finus.

Quant aux fix premières équations, comme il peut être utile de regarder les maſſes C & C' comme indéterminées, je prends les quatre équations que j'ai fans C C'; j'en tire deux autres en différentiant; éliminant enfuite pour avoir des valeurs de $f^{\frac{1}{2}}$, on élevera au quarré, on tirera enfuite une valeur de cos. λ & cos λ'; on les élevera au quarré, & ayant également chaffé les irrationalités des équations 7 & 8, on procédera à l'élimination.

On obfervera ici que fuppofant l'élimination *faite, fi on multiplie la propofée* où les plus hautes différences ne foient que linéaires, où il n'y ait pas de terme conftant, & où le premier rang ne manque point par une férie de l'ordre n -1, multipliée par e^{fx}, on aura f par une équation du degré égal à l'ordre de la propofée; en forte que l'intégrale finie qui réfultera, ne contiendra que des fonctions rationelles & entières d'une fuite de termes cos. nt, fin. nt, n étant (fi l'on appelle f, f', f'', f''', &c. *les racines de l'équation en* f) *de la forme* $\pm mf \pm m'f' \pm m''f'' \pm m'''f'''$ &c. m, m', m''' *étant des nombres entiers* pofitifs, & tels que $m + m' + m'' + m'''$ &c. ne puiffent pas être plus grands que le degré qu'on doit négliger.

De là il fuit que dans cette circonftance la détermination de ces f devient ce qu'il y a de plus important, *parce qu'ils donnent les équations de la Planète*, telles que la théorie feule les peut donner. Le refte pourra s'en déduire par une méthode empyrique.

Maintenant pour trouver les f, on remarquera que fi la propofée a la forme demandée, on aura les f par une équation de vingt fept degrés; ce qui donne vingt fept équations, même en négligeant le quarré des petites quantités.

En confidérant les quatorze équations du Problème, il eft aifé de voir que je connois 16 équations intégrales rigoureufes & algébriques, & il n'en refteroit plus que douze à trouver. Cela paroît être en contradiction avec l'article précédent, qui, lorsqu'il n'y a point de racines égales, donne vingt fept termes e^{fx} dans l'intégrale; au lieu qu'ici on n'en auroit que douze.

Mais

Mais on peut remarquer ici que ſuppoſant les 16 intégrales trouvées, & l'élimination faite, l'équation en f du douzième degré, qu'on aura alors, contiendra les arbitraires trouvées ci deſſus. Ainſi la comparaiſon entre les deux intégrales, toutes deux en ſéries, ne peut ſe faire immédiatement, puiſqu'elles n'ont pas une même forme; & en les réduiſant à la même forme, on trouveroit qu'elles ſont identiques.

On peut donc, en prenant différentes méthodes, trouver différentes valeurs de f & différentes intégrales approchées de la même équation; mais elles ne doivent différer entre elles que de quantités du même ordre que celles qu'on néglige.

On pourra donc prendre l'une ou l'autre, *mais la première* me paroit préférable; 1°. parce *qu'une équation numérale* eſt toujours réſoluble par la méthode d'approximation de *M.* De la Grange, & qu'il n'eſt pas de même des autres; 2°. parce que les quantités arbitraires qui entrent dans f, dependent dans la ſeconde d'équations tranſcendantes, ſi on veut les déterminer par des obſervations; or la ſolution de ces équations eſt très difficile, ſurtout pour le cas où les variables qui entrent dans ces équations ne ſont pas éliminées. Je ne connois point même de méthode pour le cas où elles ſont ſéparées, qui du moins ait été publiée jusqu'ici.

On pourroit cependant abréger notre méthode; en effet, d'abord on peut ſuppoſer que les C, C' & les dix arbitraires des équations 9, 10, &c. ſoient connues à très peuprès; or, cela poſé, ſi on veut déterminer quinze racines de l'équation qui eſt alors de ce degré, on le pourra, & on déterminera enſuite les arbitraires. On a quinze racines de l'équation en f, parce que quatre de ces intégrales algébriques qu'on peut avoir, contiennent des arbitraires indéterminées, & qu'ainſi on ne pourroit en faire uſage ſans introduire dans les valeurs de f des quantités non numérales.

Soit donc d'abord une équation $f^n + Af^{n-1} \ldots\ldots + P + \overline{af^n + A'f^{n-1} \ldots + P'}$, $a^2 f_n + A'' f^{n-1} \ldots\ldots$ &c. a étant très petit, & qu'ayant une quantité comme b, qui ayant été augmentée de la quantité a' très-petite. *Soit* la racine de l'équation $f_n + Af^{n-1} \ldots + P = o$; j'aurai, ſubſtituant pour f cette valeur, une équation.

$A + Ba + B'a + \Gamma a^2 + \Gamma' a a' + \Gamma'' a'^2$ &c. où a & a' ſont de petites quan-

tités. Et l'on aura a' égal une ferie en a, toutes les fois que la différence entre la fuppofition de a très petit où de a zéro ne change que d'une petite quantité la valeur de f. Dans tout autre cas la méthode d'approximation n'a plus lieu puisque les coëfficiens de l'équation en f ne peuvent plus être cenfés donnés à très peuprès.

$$\text{Si j'ai } f = b + A_{,} a + A_{,,} a_2, \&c.$$
$$f' = b' + A'_{,} a + A'_{,,} a^2, \&c.$$

& ainfi de fuite ; & que lorsque t a une certaine valeur conftante, j'aie les autres variables *données* en t, j'aurai, à caufe de $e^{A'a} = 1 - A'a$, &c. une équation qui ne contiendra que des *fonctions algébriques*, & à caufe de a très petit, j'aurai toujours cette quantité par une équation linéaire.

Il eft aifé de voir que pour les Comètes, cette dernière méthode n'a lieu qu'autant que les perturbations ne s'exerceront que dans une petite partie de l'orbite, où qu'on connoîtra le temps d'une révolution.

Nous avons fuppofé que le terme conftant manquoit dans ces équations; en effet, dans le cas où *il ne manqueroit pas, il y auroit une difficulté de plus*; pour le montrer, *prenons une équation à une feule variable & du fecond ordre* ------ $A + By + B' dy + B'' d^2y + Cy^2 + C' ydy + C'' dy^2 + C''' yd^2y + C^{IV} dyd^2y + \&c. = o$, où x eft la variable dont la différentielle eft conftante, & que je me propofe de la rendre une différentielle exacte en la multipliant par $a + by + b^1 dy + cy^2 + c^1 ydy + c^{11} dy^2 + \&c.$ le facteur étant du degrè m, & négligeant dans le produit les puiffances $m + 1$ de y & de fes différences, il eft aifé de voir que la première condition fera ici que

$$a\,By + a\,B' dy + a\,B'' d^2y + b\,A + b^1 A$$

foit une différentielle exacte; ce qui donne une équation entre a, b, & b^1.

La feconde condition fera que -------

$$\begin{array}{lllll} Acy_2 & + Ac^1 ydy & + Ac^{11} dy^2 & + a\,C''' yd_2y & + a\,C^{V} dyd^2y \\ + a\,C & + a\,C^1 & + a\,C^{11} & + b\,B^{11} & + b^1 B^{11} \\ + b\,B & + b\,B^1 & + B^1 b' & & \\ & + B\,b^1 & & & \end{array}$$

foit auffi une différentielle exacte; ce qui donne deux équations a, b, b^1, c, c^1 & c^{11},

& ainſi de ſuite. Suppoſons maintenant que l'on ait négligé le ſecond degré, alors les b & c ſeront nuls, & la première condition donnera a par une équation du ſecond ordre, & f par une du ſecond degré. Si on ne néglige que le troiſième, on aura les c égaux à zéro, & trois équations pour déterminer a, b & c; éliminant, on aura a par une équation du cinquième ordre, & f par une équation du cinquième degré, & ainſi de ſuite. D'où l'on voit que plus on pouſſe l'approximation, plus le degré de l'équation en f augmente; ce qui eſt un grand inconvénient. Il eſt vrai que dans ce cas on a autant d'intégrales différentes que chaque intégrale a de termes en y; ce qui donne le moyen d'avoir toujours y par des équations linéaires, mais cet avantage n'eſt qu'apparent. En effet, l'équation définitive en y, qui ne feroit pas linéaire, ſi A avoit été zéro, eſt *telle qu'elle* n'eſt vraie qu'autant que *y eſt toujours très petit*; or cela étant toutes les fois que y ne doit avoir qu'une *ſeule* valeur très petite, comme cela arrive dans les Problèmes de l'Aſtronomie phyſique, on peut appliquer la méthode de Newton à l'équation en y, & avoir pour y, une valeur auſſi approchée qu'on voudra; & qui ne contiendra que des termes $e^{(mf + m'f' + m''f'' \ldots)x}$; m, m', m'' &c. étant des entiers, & f, f', f'' &c. les racines *de l'équation en f*.

Maintenant il eſt aiſé de voir que ſi on n'avoit *pas immédiatement* $A = 0$, on pourroit, en différentiant la propoſée, en avoir une nouvelle où le terme conſtant ne ſe trouveroit pas; ainſi il arriveroit encore dans ce cas, que par une même méthode d'approximation on auroit deux valeurs de y totalement différentes entre elles, mais il faut obſerver qu'il ſuffit que leurs différences ſoient très petites; & pour cela il n'eſt pas même néceſſaire que les valeurs de f pour le cas où A n'eſt pas zéro, ſoient toujours peu différentes des valeurs qu'on a pour f après avoir fait diſparoître le terme conſtant. Il ſuffit que ces valeurs ſoient telles que les termes qui en naiſſent reſtent toujours très petits, c'eſt à dire, qu'elles produiſent des ſinus ou coſinus multipliés par des arbitraires qui ſoient très petites après leur détermination.

Quant à la légitimité des méthodes, on obſervera pour la premiere, 1°. que de ce que y eſt toujours petit, on n'en ſauroit conclure que $\frac{dy}{dx}$ ſoit dans le même cas; ainſi il n'eſt pas toujours légitime de négliger les puiſſances des différences

de y; 2°. Pour diſtinguer les cas où cela eſt permis, il faut voir *à poſteriori* ſi la valeur de y à laquelle on parvient en négligeant les puiſſances ſupérieures des différences eſt très petite, ou ſi elle ne l'eſt pas; 3°, on obſervera que dans quelque hypothèſe que ce ſoit, on aura finalement une équation en y dont les coëfficiens ne feront que des fonctions rationnelles & linéaires de $e^{mfx + m'f'x' + m''f''x}$ &c. m, m', m'' étant des entiers & par conſéquent des fonctions rationnelles de ſin. fx, cos. fx, ſin. $f'x$, cos. $f'x$, &c. les quantités f, f', f'' &c. dépendant uniquement du premier rang de la propoſée. Pour la ſeconde, on remarquera que ces mêmes difficultés ont lieu, mais que l'on a, en prenant l'équation infinie en f, qui *réſulte* de cette méthode pouſſée à l'infini, y égal à la ſomme des termes e^{fx}, $e^{f'x}$, $e^{f''x}$, &c. *Ainſi toutes les fois que la ſérie infinie* en f a une Loi qui permet de la former par le produit d'un nombre infini de facteurs, on aura la ſérie qui exprime y; & il faudra, pour que la méthode ſoit légitime, que cette ſérie ſoit convergente. Enfin dans ces deux cas, ſi f n'eſt pas fort grand, les méthodes expoſées ſont légitimes, & elles le feront toujours pour tout l'eſpace de temps où l'ordre étant n, $f^n y$ ſera négligeable, puiſque $\frac{dy}{dx}$ & $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne contiennent que les termes qui entrent dans la valeur de y, ces termes étant multipliés par les f ou par les f^n.

2^de^. Méthode.

Théorême général.

Soit un nombre $m - 1$ d'équations différentielles entre un nombre m de variables; x la variable dont la différence eſt conſtante, & qui ne ſe trouve pas dans l'équation; z une variable dont on peut négliger une certaine puiſſance; & y, y', y'' le reſte des variables au nombre de $m - 2$; que les équations priſes enſemble aient tous leur rangs pour chaque variable, & que les plus hautes différences de z & des y ſoient linéaires & du même ordre; je dis que ſi l'on multiplie chaque équation par une fonction de la forme $A + Bz + B'dz + Cz^2$

$+ C' z\, dz$ &c. & qu'on les ajoute enſemble en négligeant telle puiſſance qu'on voudra de z, on pourra faire en ſorte que la ſomme ſoit une différentielle exacte A, B, &c. étant finis, rationels & entiers.

Démonſtration.

Le nombre des équations étant $m - 1$, il y aura $m - 1$ facteurs, qui, n étant le degré de l'ordre de l'équation, contiendront une ſuite des puiſſances de z & de ſes différences multipliées par des fonctions des y & de leurs différences, c'eſt à dire de $\overline{m - 2} \,.\, n$ variables; & ſi p eſt le dégré au deſſus duquel on peut négliger les puiſſances de z, il y aura *autant de ces fonctions* qu'une fonction du degré p *& de n variables*, a de termes, & le nombre de facteurs ſera $m - 1$.

Cela poſé, ſuppoſons une équation intégrale du dégré p de l'ordre $n - 1$ entre z, ſes différences & les $\overline{m - 2} \,.\, n$ variables que produiſent les y & leurs différences; différentions cette fonction, comparons terme à terme avec la ſomme des propoſées, multipliées par les facteurs, il eſt aiſé de voir que ſuppoſant que le degré *des y eſt q dans l'intégrale*, & celui des mêmes y eſt q' dans les propoſées, on aura autant d'indéterminées *qu'il y a* de termes dans un nombre $\frac{p \,.\, p + 1 \,.\, p + 2 \,.\, p + 3 \cdots}{1 \,.\, 2 \cdots n}$ de fonctions de $\overline{m - 2} \,.\, n$ variables & du degré q, & $m - 1 \,.\, \frac{p \,.\, p + 1 \,.\, p + 2 \cdots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots n}$ du degré $q - q'$; d'un autre coté on aura un nombre d'équations de comparaiſon, égal à celui des termes 1°. d'un nombre $\frac{p \,.\, p + 1 \,.\, p + 2 \cdots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots n}$ de fonctions de $\overline{m - 2} \,.\, n$ variables & du degré q.

2°. De $m - 2 \,.\, \frac{p \,.\, p + 1 \,.\, p + 2 \cdots}{1 \,.\, 2 \cdots n}$ fonctions de $m - 2 \,.\, n$ variablee & du dégré $q - 1$.

3°. $\frac{\overline{p-1}\,.\,p\,.\,\overline{p+1}\,.\,\overline{p+2}\cdots}{1\,.\,2\,.\,3\cdots\overline{n-1}}$ fonctions de $\overline{m-2}\,.\,n$ variables & du degré q.

Nous aurons donc moins de fonctions du degré q des $n\,.\,\overline{m-2}$ variables, que de fonctions du degré $q - q'$ de ces mêmes variables. Or il est aisé de voir que la différence du nombre des termes entre une fonction du degré q & une du degré $q - q'$ est celle de $\frac{\overline{q+1}\cdots\cdots\overline{q+A}}{1\,.\,2\cdots\cdots A}$, $A = \overline{m-2}\,.\,n - 1$ à $\frac{\overline{q-q'+1}\cdots\cdots\overline{q-q'+A}}{1\,.\,2\,.\,3\cdots\cdots A}$ où les q montent au degré $A - 1$; mais le nombre des termes d'une fonction du degré $q - q'$ est $\frac{\overline{q-q'+1}\cdots\overline{q-q'+A}}{1\,.\,2\,.\,3\cdots}$ où les q montent au degré A; donc on peut prendre q assez grand pour que ce dernier nombre surpasse un multiple donné du premier. Donc on *peut prendre q, de manière que le mombre des coëfficiens soit plus* grand que *celui des équations de comparaison. Donc*, &c.

Remarque 1^re^.

Ce Théorème suppose que lorsqu'on néglige les *puissances* $p + 1$ d'une variable, il est permis de supposer que les équations *différentielles sont multipliées par* des facteurs du degré p, Or cela est évident. En effet le facteur exact peut être ici supposé, en général, égal à une série infinie; alors le produit sera une série qui étant intégrée, donnera l'intégrale exacte en série; or en ne négligeant que les termes du degré $p + 1$ dans cette intégrale, elle contiendra tous les termes du degré p dans le facteur.

Remarque 2^de^.

Je ne suppose ici qu'une seule variable dont la différence soit très-petite, si on

en

en avoit plusieurs. La demonstration seroit la même. En effet, toutes les plus hautes différences de ces variables ont un coëfficient qui a moins de termes que la fonction qui ne contient pas de plus hautes différences, puisqu'il est d'un degré moins élevé.

Remarque 3^e.

On voit 1°. que pour être employée, la méthode précédente exige que le rang de termes sans z ne manque point; comme la méthode semblable pour intégrer exige qu'il ne manque point le premier rang de z.

2°. Que si tous les termes y sont, & même un *terme constant*, & qu'on suppose un facteur e^{fx} *à tous les termes*, tant des facteurs que de l'intégrale, le degré de *l'équation* qui donnera f, dépendra de celui où monteront les facteurs, & où l'approximation sera poussée, comme cela arrive pour le même cas dans la méthode du paragraphe précédent

3°. Que si l'on a toutes les variables linéaires, on aura f indépendant du degré de l'approximation, & par une équation d'un degré égal au nombre de toutes ces différences; ce qui se rapporte au cas semblable dans la première méthode.

4°. Que dans les autres cas, f peut dépendre ou ne pas dépendre du degré d'approximation, selon l'intégration du premier rang qui reste dans l'équation ordonnée par rapport à toutes ces variables, contient ou ne contient pas de quantités qui soient déterminées par les conditions d'intégrabilité pour les rangs suivans; en effet, il est aisé de voir que dans le second cas, quelque loin que l'approximation soit poussée, f est donné par les équations de comparaison pour le premier rang: & que les autres coëfficiens ne sont que des fonctions de f & des coëfficiens de ce premier rang. On voit aussi que dans tous les cas les racines de l'équation en f donneront au moins autant d'intégrales qu'on en doit avoir; & le nombre exactement qu'on doit en avoir si l'équation proposé est dans le cas du No. 3. ce cette Remarque.

Remarque. IV.

En employant cette Méthode, il peut arriver que le nombre des coëfficiens

indéterminés surpasse celui des conditions. Mais il faut observer que puisqu'il est question d'une méthode d'approximation, il peut y avoir une infinité de solutions différentes. En effet toute solution dans laquelle la valeur de la variable s'écartera peu de la vraie valeur, est également une bonne solution, & l'on voit qu'on peut à volonté en former une infinité.

ARTICLE III.

Conséquences des Méthodes précédentes.

Ire. Méthode.

I. Par cette méthode on a chaque quantité cherchée égale à une *fonction rationnelle* de termes de la forme e^f; ainsi pour que l'hypothèse des R, X, Z, toujours très petite, puisse être légitime pour toute l'orbite, il faut que l'équation en f n'ait que des racines $f = o$, $f^2 = a$, & que a soit négatif; ou bien que les coëfficiens dependans des autres racines, & que les observations doivent déterminer, soient égaux à zéro.

II. Dans le cas où il n'y auroit qu'une partie de l'orbite où l'hypothese choisie dût avoir lieu, les coëfficiens doivent seulement être tels que les termes qui y répondent, soient très-petits, pendant cet espace de temps.

III. Si pour chaque révolution, il y a une partie de l'orbite où la supposition ait lieu, en ce cas on aura $f = o$ on $f^2 = - a^2$; a étant réel, & tel que les termes cos. at & sin. at multipliés par leurs coëfficiens soient toujours très petits pendant cette partie de l'orbite.

IV. Nous avons trouvé, en éliminant, r & les autres variables égales à des fonctions des quantités très petites & de leurs différences; ainsi en substituant ces valeurs, nous aurons r; ensuite nous aurons par les observations cos. λ & cos. λ' cosinus des distances en longitude de chaque Comète au Soleil, prises sur l'Ecliptique, & $\frac{r}{z}$, $\frac{r'}{z'}$, sinus des latitudes; donc nous aurons des équations pour déterminer les constantes.

V. Mais on voit ici que si on néglige dans les valeurs de r, z, cos. x, &c. les puis.

puiſſances des quantités très-petites qu'on a déja négligées, ces équations pour les arbitraires ſe trouveront non ſeulement être linéaires, puisque les $\frac{r}{z}$, $\frac{r'}{z'}$ ſont *égaux* à des fonctions rationnelles, mais que même elles n'auront pas plus de termes que ſi on avoit cherché les conſtantes des équations en X, Z, &c. immédiatement par les obſervations, & l'on n'aura beſoin que du même nombre d'obſervations pour déterminer celles de ces valeurs de r, z, &c.

VI. Dans les numéros 1, 2, 3 de cet article, nous avons dit qu'il y a des cas où il faudroit que le coëfficient fût zéro ; dans ce cas il eſt aiſé de voir que le coëfficient du terme correſpondant doit être auſſi zéro *dans la valeur de* r ou cos. x ; mais il *faut obſerver qu'il n'eſt pas néceſſaire* que cette quantité ſoit abſolument *égale* à zéro ; en effet les obſervations ne ſont exactes qu'à une très petite quantité près : il faut donc ajouter cette petite erreur à la valeur des obſervations, en négliger les puiſſances ſupérieures dans l'élimination des arbitraires ; & ſi les coëfficiens qui doivent être nuls, ſont du même ordre que les quantités qu'on peut ajouter à l'obſervation, on pourra les regarder comme nuls.

VII. *Si l'équation en* f *a des racines égales, & que les coëfficiens des termes en* t, qui en naiſſent ne ſoient pas zéro d'après les obſervations, on remarquera 1°. que ſi on examine la ſérie qui donne une valeur de Z, & qu'en la continuant à l'infini, elle ne contienne qu'un terme en t, où t ne monte qu'à un degré fini, quelque loin que la ſérie ſoit continuée ; alors on peut ſuppoſer une véritable équation ſéculaire ; 2°. *que ſi cela n'arrive pas*, & que les coëfficiens que l'obſervation donne pour les termes en t ne ſoient pas très petits, il en faut conclurre que l'hypothèſe n'a pas lieu dans le cas particulier, excepté pour un très petit eſpace de temps ; mais ſi les coëfficiens ſont très petits, l'eſpace de temps pour lequel l'hypothèſe aura lieu, peut être très grand ; la ſolution que donne la méthode ſera bonne en général, en obſervant de faire une nouvelle détermination de conſtantes au bout de cet eſpace.

Dans le premier cas, il y a une véritable équation ſéculaire, parce que, quoique la ſuppoſition de la variable toujours regardée comme très petite, n'ait pas été exacte, cependant la valeur en ſérie que donne la ſolution, eſt la vraie valeur, & elle ſe trouve diviſée en deux parties ; l'une qui peut devenir très-grande, &

l'autre, qui ne contient que des ſinus & coſinus, & qui peut reſter *toujours* très petite. Dans le ſecond cas où le coëfficient des puiſſances de t ſeroit très petit, on ne peut dire *à priori* que la ſuppoſition & la ſolution qui en réſultent ſoient exactes ou inexactes. En effet en ſuppoſant une ſubſtitution qui auroit augmenté les coëfficiens de l'équation en f de quantités infiniment petites, mais telles que les racines ne fuſſent plus égales, on auroit eu une Solution ſans t, *ou*, la détermination des arbitraires étant faite par les mêmes obſervations, les *termes* en ſinus & coſinus de petits angles qui auroient pris la place des puiſſances de t, auroient des coëfficiens peu différens. Par exemple, *dans le* cas où la propoſée *auroit* un terme conſtant, il ſuffiroit d'augmenter les variables d'une très petite quantité conſtante, pour *faire disparoître* les puiſſances de t.

Conſéquences de la 2^{de}. Méthode.

I. Si maintenant on examine les équations des Numeros 18. 19. 20: on verra que pour les mettre dans le ſecond cas de la remarque précédente; il faut ſuppoſer ſin. x, cos. x, z & les autres variables des ſix premières équations, augmentées d'une conſtante, telle que *toutes les variables ſe trouvent ſous une forme linéaire;* enſuite il ſera *aiſé, en différentiant une fois, & éliminant,* de *n'avoir* aucun terme ſans variables.

II. Il faut obſerver que les nouvelles quantités qu'on a ajoutées aux r, cos. x, z, &c. doivent être très petites; ſans quoi on ne pourroit ſuppoſer que les X, Z, R, &c. ſoient continuellement *très petits par* rapport à r, z, &c.

III. Ces quantités ne ſont qu'au nombre de ſix, *nombre inférieur à celui des racines* de l'équation en f^2; ainſi quand ces ſix quantités donneroient ſix équations arbitraires pour les valeurs de X ou Z, il ſeroit néceſſaire d'en avoir ſix autres au moins dépendantes de celles-là; ce qui fait disparoître en partie ce qui pourroit ici ſembler paradoxal: il le ſeroit en effet, qu'on put avoir telles équations qu'on voudroit pour l'orbite corrigée; mais on voit ici que ſix de ces équations une fois données, les autres ſont déterminées par elles, & que même les ſix premières ne ſont point abſolument à volonté, mais telles que les quantités qu'on ajoute aux variables ſoient très-petites.

IV. Dans cette methode ci, il faut avoir égard au degré où il faut que mon-

tent les r, cos. x] les z, &c. après l'intégration, & l'intégrale générale doit contenir les équations cos $\overline{mf + m'f'' + m''f''}$, &c. Le nombre $m + m' + m''$ (les m étant pris tous positivement) est égal ou plus petit que le degré où montent les f^x après l'élimination & en négligeant la puissance convenue.

V. Quant aux différens systèmes pour les racines de l'équation en f, on fera les mêmes remarques que pour la *Méthode précédente*.

J'ai supposé jusqu'ici la force du Soleil incomparablement plus grande que les forces perturbatrices; maintenant je suppose que celles-ci soient beaucoup plus grandes, en sorte que la Comète C' puisse être regardée comme le satellite de la Comète C, ou reciproquement. Dans cette hypothèse, les équations 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont les mêmes, mais on a seulement, au lieu des six autres équations, *les* 15, 16, 17, 18, 19, 20. En effet, on voit qu'il suffit de supposer que les orbites sont à peu près ce qu'elles seroient si le Soleil n'agissoit point.

Si maintenant la force du Soleil & celle de la Planète perturbatrice sont comparables entr'elles, & qu'on puisse supposer que la distance des Comètes entr'elles est très petite par rapport à leurs distances au Soleil; on aura les équations du Problème; & conservant les équations ci-dessus, & prenant seulement, au lieu des équations 1, 2, 3, 4, 5, 6, les équations 21, 22, 23, 24, 25, & 26; & les mêmes méthodes peuvent également s'appliquer à ces nouvelles équations.

Je ne m'étendrai pas d'avantage sur cette théorie, je me contenterai d'observer que pourvu que la masse des Comètes soit incomparablement plus petite que celle du Soleil, ou lorsqu'il n'y a aucun point où leur force perturbatrice & leur distance réciproque soient à la fois comparables à celle du Soleil, il n'y a point de lieu dans leur orbite pour lequel une des deux méthodes ne donne les valeurs qu'on cherche.

Dans le cas où les deux approximations doivent être employées, lorsqu'il s'agit de la détermination des arbitraires, il faut choisir, s'il est possible, l'espace où les valeurs données par chacune des deux méthodes peuvent être regardées comme exactes; & quand même cet espace ne seroit pas observable, on prendroit au lieu des quantités données par l'observation, les quantités déduites du résultat analytique de la première approximation, pour laquelle on peut toujous déterminer les arbitraires par l'observation: ensuite on les déterminera de la même manière, mais d'après les observations de la Comète vers son retour; ce qui donnera ces arbitrai-

E 2

res plus exactement, & on y fera entrer le temps d'une révolution &c. En effet, ſans cela, une quantité inobſervable pourroit produire dans les arbitraires des différences très-conſidérables; mais par ce moyen il y aura moins d'incertitude.

Pour l'éviter abſolument dans tous les cas où cela eſt poſſible, on augmentera d'une quantité très petite & inconnue chaque obſervation; & on verra ſi les quantités arbitraires ainſi déterminées, & qui contiennent ces petites quantités au premier degré ſeulement, ne varient point d'une manière ſenſible, lorſqu'au lieu de faire ces petites quantités très-petites on les ſuppoſe abſolument nulles.

APPENDICE Ier.

J'ai ſuppoſé jusqu'ici que l'on avoit exactement trois lieux de la Comète, aſſez voiſins pour ſervir à déterminer l'orbite, en la regardant d'abord comme rectiligne. Mais la difficulté d'obſerver les Comètes ne *permettant pas de faire cette ſuppoſition* en général, *je crois devoir montrer comment* la méthode que j'ai *développée* ci-deſſus, peut s'appliquer à d'autres hypothèſes d'obſervations qu'il eſt plus facile de ſe procurer.

I. Suppoſons d'abord que nous n'avons que des obſervations à peu près exactes, il en réſultera que les qnantités p, q, r, s, t, &c. du Tableau d'opérations (page 1.) ſeront toutes augmentées dans ces trois premières équations, de petites quantités dont on pourra negliger le quarré, & qu'ainſi ſuppoſant pour les trois obſervations (1), (2), (3), *Tableau des Opérations*, que T eſt connu exactement & X à très peu près, on aura trois petites indéterminées de plus; & comme le rapport des temps n'eſt alors auſſi connu qu'à peu près, il reſtera dans les valeurs finales de a, c, e, f, quatre indéterminées, & par conſequent elles ſeront données par des fonctions de la forme

$$A' + B' d\,X + C' d\,X' + D' d\,X'' + E' d\,T''.$$

2. Cela poſé, on diſtinguera deux cas, celui dans lequel on a de bonnes obſervations, mais trop éloignées pour ſervir à la détermination de l'orbite rectiligne, & celui où l'on n'a point du tout de bonnes obſervations.

3. Dans le premier cas, on emploiera ces valeurs pour la première approximation de l'orbite parabolique; il en résultera des valeurs de A, B, e, f de la même forme que ci-dessus. On les supposera donc, pour abréger, de la forme

$$A + dA,\ B + dB,\ e + de,\ f + df,$$

& on cherchera, dA, dB, de, df, &c. Prenant la méthode développée dans le Tableau d'opérations (folio I) où l'on emploiera les valeurs approchées de e & de f que donnent les mauvaises observations, & la méthode pour les approximations successives, & l'on aura soin si α est l'erreur des bonnes observations & β l'erreur des mauvaises, de pousser l'approximation jusqu'aux $d^n e$, β^n étant du même ordre de petitesse que α.

4. Si l'on n'avoit aucune bonne observation, alors il faudroit suivre les opérations indiquées, & on trouveroit A, B, e, f, égaux à des fonctions $A' + B'\,dX + C'\,dX' + D'\,dX'' + E'\,dY''$. Mais il vaut mieux dans ce cas supposer le temps connu exactement. Alors en suivant les mêmes procédés on trouveroit A, B, e, f, de la forme $A' + B'\,dX + C'\,dX' + D'\,dX'' + E'\,dY + F'\,dY' + G'\,dY''$. Mais comme chaque temps écoulé entre deux des cinq observations pour l'orbite rectiligne est connu ici, & qu'on n'en a employé qu'un rapport entre deux temps écoulés pour déterminer a, c, e, f, il en reste deux connus, & comme ils seront donnés en fonctions de la même forme que ci-dessus, on aura par conséquent deux équations en dX, dX', dX''; dY, dY', dY''; donc on aura, en substituant A, B, e, f, donnés par des fonctions de la forme

$$A' + B'\,dX + C'\,dX' + D'\,dY + E'\,dY'.$$

5. Cela posé, substituant ces valeurs dans l'équation à la parabole, on aura la série des X & des Y donnée par des fonctions de la forme

$$A' + B'\,dX + C'\,dX' + D'\,dY + E'\,dY'.$$

Donc si l'on suppose que les valeurs de ces X & de ces Y données par l'observation ne puissent différer de la vraie valeur que de quantités plus petites que V; retranchant de la valeur observée de X & Y pour chaque observation, sa valeur d'après la théorie, il faudra que la différence soit plus petite que V; on aura pour chaque observation deux conditions

$$V > A' + B'\,dX + C'\,dX' + D'\,dY + E'\,dY'.$$

On aura donc pour une suite d'observations, une suite de conditions semblables.

6. Suppoſons d'abord que les B', C', D', E' ſoient tous poſitifs, & qu'on ait pris les obſervations de manière que dX, dX', dY, dY' & V ſoient poſitifs, on aura, en les ſuppoſant tous zéro, hors un,

$$dX < \frac{V - A'}{B'},\; dX' > \frac{V - A'}{C'};\; dY < \frac{V - A'}{D'},\; dY' < \frac{V - A'}{E'}.$$

Prenant dans la ſérie des conditions celle où E' eſt le plus grand, il faudra que dY' ſoit entre zéro & $\frac{V - A'}{E'}$; prenant celle où D' eſt le plus grand, il faudra que dY' ſoit entre zéro & $\frac{V - A'}{D'}$, & de même pour dX & dX'; on aura donc des limites entre lesquelles ſeront les dX, dX', dY, dY'; & l'on voit qu'il faut néceſſairement que $V > A$, ſi A eſt poſitif.

7. Si l'on a ſeulement les B' négatifs dans une ou pluſieurs conditions, on en tirera des conditions $dX > \frac{A' - V + C'dX' + D\,dY + E\,dY'}{B'}$; par conſéquent mettant cette valeur plus petite dans les équations où B' eſt poſitif, on aura autant de conditions $V > A'' + C''\,dX' + D''\,dY + E''\,dY'$ qu'on traitera comme ci-deſſus, ſi C'', D'' & E'' ſont poſitifs, ou qu'on réduira à la forme $A''' + D'''\,dY + E'''\,dY'$ pour les équation où C'' ſeroit négatif.

8. Nous aurons donc par ce moyen des limites pour les dX, dX', dY, dY', tels qu'ils ſeront $> O$ & $< P$, ou $< V$ & $> Q$, ou $> Q$ & $< P$. Cela poſé, prenant toutes ces conditions primitives & les diviſant en deux parties pour que les indéterminées aient des coëfficiens conſtans, on aura pour chacune une condition $K > K'$. Subſtituant pour avoir les limites de chaque indéterminée dans K, les limites ſupérieures de la valeur des autres, & dans K' leurs limites inférieures, on aura la limite inférieure pour la quantité cherchée ſi elle eſt dans K, & ſa limite ſupérieure ſi elle eſt dans K'; & l'on aura ainſi pour chacune ſes limites les plus rapprochées.

Ainſi l'on voit en général comment on peut, après avoir déterminé l'orbite pa-

rabolique, trouver des corrections & de nouvelles limites pour la faire couvenir à autant d'observations qu'on voudra d'un inexactitude donnée.

9. Supposons maintenant que pour les temps supposés connus, on ait X déterminé assez exactement & les Y à peu près, il suit du N°. 4. ci dessus, que l'on aura les A, B, e, f, de la forme $A' + B' dY$; donc si on suppose une quatrième observation, on aura le temps écoulé connu, & de plus donné par une fonction de la forme $A' + B' dY + C' dY_{,}$, $Y_{,}$ étant l'Y répondant à cette quatrième observation; on aura de plus $X_{,}$ donné par une fonction semblable & connue par l'observation; donc l'on aura dY connu, & par conséquent l'orbite exactement déterminée toutes les fois qu'il n'arrivera pas que dans les équations en dY & $dY_{,}$ les deux termes constans manquent, ou que les valeurs de dY ne soient pas *très petites*; ce qui, dans ces équations approchées, *revient au meme.*

Lorsque cela arrive, alors on n'aura besoin que d'une bonne observation pour avoir Y.

10. Supposons maintenant que je ne puisse avoir d'observations que pour X, il est clair d'abord qu'à cause de $x + a\ y + c = o$, & $\dfrac{x + A}{y + B} = X$, nous aurons

$$Xy + BX - A + ay + c = o,$$

& de même pour chaque observation; donc si nous en prenons trois, nous aurons $y'' + A'y' + B'y = o$; & par conséquent mettant pour les y leurs valeurs tirées de l'équation précédente, on aura une équation de la forme

$$p + qac + ra^2 + tc + sa + a^2c = o.$$

Prenant donc quatre observations de plus, nous aurons cinq équations qui en faisant ac, a^2, c, a, a^2c égaux à cinq variables différentes a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, deviendront de la forme

$$p + qa + ra^I + sa^{II} + ta^{III} + a^{IV} = o.$$

nous supposerons les coëfficiens des trois dernières de ces équations augmentées de quantités proportionnelles à dX^{IV}, dX^{V}, dX^{VI}, & après avoir suivi les formules développées dans le *tableau d'Opérations*, nous déterminerons dX^{IV}, dX^{V}, dX^{VI} par les conditions que l'on doit avoir $a^{IV} = a''' a'$, $a = a''' a''$, $a'' = a'$. Connoissant dX^{IV}, dX^{V}, dX^{VI}, nous aurons a & c, & ainsi pour déterminer e & f, il

suffiroit de deux obſervations complettes; & comme il en a fallu ſept imcomplettes; pour déterminer a & c, il faudra pour l'orbite rectiligne avoir deux obſervations complettes & cinq imcomplettes.

11. Si nous n'avons pas d'obſervations complettes, ſuppoſons que nous en avons pour Y ſeulement, nous aurons $ex_{,} + fy_{,} = Y_{,} y_{,} + BY_{,}$; donc $eay_{,} + fy_{,} - ce = Y_{,} y_{,} + BY_{,}$ & $y_{,} = \frac{ce + BY_{,}}{f - ea - Y_{,}}$. Donc ſubſtituant dans l'équation. $y'' + A'y'_{,} + B'y_{,} = o$, les valeurs des y, & appelant ce, e' & $f - ae$, f', nous aurons une équation de la forme

$$p + qf'^2 + re'f' + sf' + te' + f'^2 e' = o;$$

ce qui, ſi l'on fait f'^2, $e'f'$, f', e', $f'^2 e'$, égaux à a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, & qu'on prenne quatre obſervations nouvelles, nous conduit à cinq équations ſemblables à celles du N°. précédent, & deſquelles on tirera de meme les valeurs de e' & de f'; mais $e' = ce$ & $f' = f - ae$; donc connoiſſant c & a, on aura $e = \frac{e'}{c}$ & $f = f' + a\frac{e'}{c}$.

12. Cette méthode exigeroit, comme on voit, que les quatorze obſervations, ſept pour X & ſept pour Y, puiſſent être priſes dans des lieux aſſez voiſins pour que l'on y pût ſuppoſer l'orbite rectiligne, ainſi il faut chercher à éviter cet inconvénient; pour cela il ſuffit, connoiſſant a & c, de chercher l'orbite parabolique approchée ſeulement pour le plan des x & des y.

13. Pour cela je ſuppoſe un orbite rectiligne & qui coïncido avec la parabolique aux deux points extrêmes des ſept obſervations pour X, & en diffère très peu pour une autre obſervation faite au delà, mais peu diſtante. Je prends l'équation à la parabole $C^2 + yCD - \frac{y^2}{4}D^2 + xC + \frac{xy}{2}D - \frac{x^2}{4} = o$; j'y mets pour x ſa valeur $Xy + BX - A_{,}$ & enſuite pour y ſa valeur $\frac{A - C - BX}{X + a}$, en ob-

ſervant

ſervant que pour une obſervation intermédiaire, il faut ajouter dx & dy à ces valeurs de x & de y. Cela poſé j'aurai à cauſe de la proportion entre les aires quatre équations qui contiendront quatre variables, dont deux très petites, & je les déterminerai toutes par le moyen des formules développées dans le *folio* 3 *du Tableau.*

14. Ayant donc cette première approximation pour la parabole, je prendrai trois nouvelles obſervations, & à cauſe de $x = Xy + BX - A$, je mettrai cette valeur dans l'équation à la parabole, elle deviendra de la forme

$$y^2 + Py + Q;$$

J'en tirerai la valeur de y, & ayant ainſi des valeurs de y' & y'', je les ſubſtituerai dans l'équation pour le rapport des aires; *j'aurai* donc une équation qui contiendra les *deux inconnues* C & D; je prendrai une quatrième obſervation pour avoir une nouvelle équation entre ces mêmes variables; mais comme j'ai des valeurs approchées, je pourrai y appliquer la méthode pour les approximations ſucceſſives, & j'aurai des valeurs auſſi approchées que je voudrai de C & de D.

15. Les équations en C & D priſes de cette manière, contiendront des radicaux, mais il eſt aiſé de voir que la *méthode* pour les approximations ſucceſſives, s'applique immédiatement à toutes eſpèces de fonctions.

16. Connoiſſant cette orbite parabolique; ſi l'on cherche à déterminer e & f, on trouvera que la méthode immédiate ſeroit trop longue; il faut donc chercher pour le temps des ſept obſervations pour les T une ligne droite qui coïncide avec les deux obſervations extrêmes, & qui pour les autres ne diffère de l'orbite parabolique que de petites quantités.

17. En conſéquence nous avons $y = \dfrac{e' + BT}{f' - T}$,

$$y' + dy' = \frac{e' + B'T'}{f' - T'}, \quad y'' + dy'' = \frac{e' + B''T''}{f' - T''}, \text{ \&c}$$

jusqu'à ... $y'''''' = \dfrac{e' + B''''''T''''''}{f' - T''''''}$, Prenant maintenant les équations aux temps,

on aura par la même méthode que dans le N° 11, e' & f, mais ils seront de la forme $A + B\,dy' + C\,dy''$ Maintenant il faut que prenant

$$y' = \frac{e' + B' Y'}{f' - Y'} - dy', \quad \& \quad y'' = \frac{e' + B'' Y''}{f' - Y''} - dy'';$$

$$y = \frac{e' + B Y}{f' - Y} \quad \& \quad y'''''' = \frac{e' + B'''''' Y''''''}{f' - Y''''''},$$

ces valeurs conviennent à l'orbite parabolique ; donc substituant ces quatre valeurs *dans les deux équations* pour les temps, équations qu'on peut supposer ne contenir point de x, on aura *deux équations* qui contiendront dy' & dy'' ; donc on pourra les déterminer, & on aura e', & f'.

18. Mais $e' = ce$, & $f' = f - ae$; donc pour avoir e & f, il faudra supposer que si on met pour y & y'''''' leurs valeurs ci dessus, on satisfera à l'équation à la parabole ; on aura donc deux équations du second degré en x & en x'''''' ; les résolvant, on aura, à cause de $x = ay + c$, $x'''''' = ay'''''' + c$,

$a = \dfrac{x'''''' - x}{y'''''' - y}$, & par conséquent c, & delà e & f.

19. Connoissant donc une première approximation pour e & f, nous prendrons la valeur de $x = \dfrac{Y - f}{e} y + \dfrac{B}{e} Y$: nous la substituerons dans l'équation de la parabole, & nous aurons y par une équation du second degré : Nous aurons de même y' & y'', donc substituant dans l'équation pour les temps, nous aurons une équation qui contiendra C, D, e, f ; prenant une autre observation afin d'avoir une nouvelle équation semblable, & nous aurons pour e, f, des valeurs aussi approchées qu'on pourra en avoir besoin.

20. Ce que je viens de dire pour les deux plans X & Y, aura lieu en général pour tous les plans assujettis à la condition suivante que l'on ait $x = AX + BZ + C$, $y = A'X + B'Z + C'$ & $z = A''X + B''Y + C''Z + D$, ou les plans des x, y, z seront tout ce qu'on voudra, pourvu qu'ils soient perpendiculaires & les mêmes pour chaque observation, & les A, B, C, &c. au contraire pourront varier

à chaque obſervation, & alors il ſuffira de pouvoir obſerver ſéparément dans les plans des X & des Y les ſinus ou tangentes exprimés par $\frac{X}{Z}$ ou par $\frac{Y}{Z}$. Dans les autres cas, la ſolution, quoique poſſible par les mêmes moyens, devient trop compliquée.

Ainſi toutes les fois qu'on pourra rapporter les obſervations à des plans de cette eſpèce, on pourra ſans trop de difficulté, réſoudre le Problème, quoique l'on n'ait que des obſervations incomplètes; c'eſt-à-dire, faites ſeulement par rapport à un des plans.

APPENDICE II^de^.

Dans les Méthodes expoſées ci-deſſus pour avoir une valeur approchée d'une quantité dont on peut négliger une puiſſance quelconque, nous avons toujours négligé la même puiſſance de ſa différentielle diviſée par la différence conſtante; ce qui n'eſt pas toujours légitime. Comme cet inconvénient eſt le même dans toutes les méthodes générales données juſqu'ici, je crois que les Analyſtes verront avec plaiſir la méthode ſuivante où l'on n'eſt plus obligé que de négliger les puiſſances de la quantité très petite & de ſes différences finies qui le ſont néceſſairement auſſi. Soit une équation entre y, ſes différences juſqu'à $d^n y$ & la différence conſtante dx; que cette équation ſoit ordonnée par rapport à y & ſes différences; qu'aucun rang ne manque; que le terme conſtant n'y ſoit pas, & que $d^n y$ n'y ſoit qu'au premier degré. Je la multiplie par une ſérie de y & de ſes différences juſqu'à $d^{n-1} y$. Tous les termes de cette fonction ayant un coëfficient conſtant, multiplié par e^{fx}, & je ſuppoſe qu'elle eſt devenue par là une différentielle exacte. Il eſt clair que j'aurai f par une équation du degré n, & par conſéquent n différentielles exactes *différentes* qui me donneront autant d'intégrales *différentes*.

Soit $V = 0$ une de ces intégrales, dV sa différentielle telle que faisant $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{ddy}{dx^2} = q$, $\frac{d^3y}{dx^3} = r$ &c. j'aie $dV = Adx + Bdy + Cdp + Ddq + Rdr$, &c. j'aurai $\Delta V = dV + \frac{d^2V}{2} + \frac{d^3V}{1.2.3}$, &c. & en supposant que j'aie mis Δx pour dx, Δy pour dy, Δp pour dp, &c. dans dV, ddV, &c. & que dans ddV, $dddV$, &c. je n'aie fait varier ni dy, ni dp, &c. Cela posé, il est clair que si je suppose $V = XY$, X étant x^{fx}, & Y étant la fonction en y, p, q, &c. j'aurai:

$$dV = XdV + YdX, \quad d^2V = \frac{Yd^2X + 2dYdX + Xd^2Y}{2},$$

$$\frac{d^3V}{1.2.3} = \frac{Yd^3X + 3dYd^2X + 3d^2YdX + Xd^3Y}{2.3}$$

$$\frac{d^mV}{1.2.3...m} = \frac{Yd^mX + m\,dYd^{m-1}X + \frac{m.m-1}{1.2}d^2Yd^{m-2}X \text{ \&c.}}{1.2.3......m}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Delta V = {} & Y.\,dX + \frac{d^2X}{2} + \frac{d^3X}{2.3}\,.....+\frac{d^pX}{1.2.3....p} \text{ \&c.}\\ & + dY.\,X + \frac{2dX}{2} + \frac{3d^2X}{2.3}\,....+\frac{d^pX.\,p+1}{1.2.3...p+1} \text{ \&c.}\\ & + ddY.\,\frac{X}{2} + \frac{3dX}{2.3} + \frac{6d^2X}{2.3.4}\,...+\frac{d^pX\,\frac{p+1.\,p+2}{1.2}}{1.2...p+1.\,p+2}\end{aligned}$$

$$+ d^mY.\frac{X}{1.2\ldots m} \qquad + d^pX\frac{\frac{\overline{p+1}.\overline{p+2}\ldots\overline{p+m}}{1.2\ldots m}}{1.2.3\ldots\overline{p+m}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mettant maintenant pour dX, d^2X, &c. leurs valeurs $e^{fx}f$, $e^{fx}f^2$ &c. on aura

$$\Delta V = Y\, e^{fx}.\, f + \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{2.3} \ldots\ldots + \frac{f^p}{2.3\ldots p} \ldots\ldots$$

$$+ dY.\, e^{fx}.\, 1 + f + \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{2.3} \ldots\ldots + \frac{f^p}{2.3\ldots p} \ldots\ldots$$

$$+ d^2Y.\, e^{fx}\frac{1}{2}.\, 1 + f + \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{2.3} \ldots\ldots + \frac{f^p}{2.3\ldots p}\ \&c.$$

$$+ d^mY.\, e^{fx}.\ \frac{1}{1.2\ldots m}\, 1 + f + \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{2.3} \ldots + \frac{f^p}{2.3\ldots p}\ \&c.$$

$$+ \&c.$$

& par conséquent comme la somme de la série $1 + f + \frac{f^2}{2} \ldots\ldots + \frac{f^p}{2.3\ldots p}$ &c. est e^f, nous aurons en réduisant,

$$\Delta V = e^{fx}\left\{\overline{e^f - 1}\,Y + e^f dY + e^f\frac{d^2Y}{2} + e^f\frac{d^3Y}{2.3}\ \&c.\right.$$

$$\text{ou } \Delta V = e^{fx}\left\{e^f\,\overline{Y + dY + \frac{d^2Y}{2} + \frac{d^3Y}{2.3}}\ \&c. - Y\right\}$$

au reste, on sera parvenu plus aisément à cette conclusion en supposant que $\Delta V = \overline{X + \Delta X}\,.\,\overline{Y + \Delta Y} - XY$; en effet

$$X + \Delta X = e^{fx}\, e^f.\ Y + \Delta Y = Y + dY + \frac{d^2Y}{2},\ \&c.$$

Maintenant divisant cette fonction ΔV par e^{fx}, j'aurai $e^f\ \overline{Y + \Delta Y} - Y =$

$\overline{e^f - 1}\, Y + e_f\, dY + \frac{e_f\, d^2 Y}{2}$ &c. $= 0$, équation où il n'y a point de terme sans y ou la fonction Y contient y, dy, - - - $d^{n-1} y$, Δy, $d\Delta y$, - - - - - - $d^{n-1} \Delta y$, le nombre des valeurs de f, de V & de Y étant n; j'aurai donc n équations entre les y, dy - - - $d^{n-1} y$, Δy, $d\Delta y$ - - - $d^{n-1} \Delta y$. Je regarderai Δy comme une nouvelle variable y'; & comme on sait que si l'on a deux équations en

$$y,\ dy \text{ - - - - } d^{n-1} y, \quad y',\ dy' \text{ - - - - } dy'^{n-1}\, dy'$$

on peut *toujours* les intégrer, je prendrai à volonté deux des équations $\overline{e^f Y + \Delta Y - Y} = 0$. *Ainsi comme elles sont* au nombre de n, je pourrai faire $n - 1$ combinaisons différentes, en les prenant *deux à deux*.

Prenant donc deux de ces équations, & les traitant comme des *équations de* l'ordre $n - 1$ entre les variables y, y' & x *ou* x *ne se trouve point*, & *où* dx est supposé constant. Je remarquerai que les $d^{n-1} y$, $d^{n-1} y'$ n'y sont pas toujours sous une forme linéaire, mais que ces équations étant en séries, on peut toujours les transformer en des *équations où les différences les plus hautes* ne soient qu'au premier degré.

Supposant d'abord qu'il n'y a qu'une seule équation entre y & x *où* x *manque* & dx est constant, & qui n'a point de termes sans y, & à qui il ne manpoint de rang; dans ce cas, je fais $d^{n-1} y$ égal à une fonction sans terme constant de y, dy - - - $d^{n-2} y$. Je substitue cette valeur de $d^{n-1} y$ dans l'équation en série, où je suppose que $d^{n-1} y$ est *à différentes puissances*. Cela posé, & l'équation étant ordonnée par rapport aux puissances de y & de ses differences, il est clair que si j'y substitue la valeur $d^{n-1} y$ sans terme constant, il en résultera une fonction de y, dy - - - $d^{n-2} y$ qui doit être nulle identiquement. Maintenant le premier rang de cette fonction après la substitution, contiendra tous les coëfficiens du même rang de la valeur de $d^{n-1} y$; le second rang de la fonction qui doit être nulle identiquement, contiendra les coëfficiens du deuxieme rang de la valeur de $d^{n-1} y$, & ainsi de suite : d'un autre côté, les coëfficiens du premier rang de l'équation proposée, entreront seuls dans le premier rang de l'équation qui doit être identiquement nulle. Les coëfficiens du premier & du second de la proposée entreront seuls dans le

second rang de l'équation identiquement nulle. Ceux des trois premiers rangs de la proposée entreront seuls dans le troisième de l'équation identiquement nulle, & ainsi de suite. Donc 1°. pour déterminer les coëfficiens de chaque rang de la valeur qu'on a supposée pour $d^{n-1}y$, on n'aura qu'autant d'équations que d'indéterminées. 2°. Les équations ne contiendront que des fonctions finies des coëfficiens de la proposée ; donc on aura la valeur de $d^{n-1}y$, & par conséquent une nouvelle équation en série où $d^{n-1}y$ est sous une forme linéaire.

Supposons maintenant deux équations entre les trois variables y, y' x, où x manque, dx est constant, & où les $d^{n-1}y$, $d^{n-1}y'$ montent à des puissances supérieures à l'unité, faisons $d^{n-1}y$ *égal à une fonction* sans terme constant de y *jusqu'à* $d^{n-2}y$, & de y' jusqu'à $d^{n-2}y'$, & de même $d^{n-1}y'$ *égal* à une semblable fonction, nous trouverons par le même raisonnement que ci-dessus, que si on substitue les valeurs de $d^{n-1}y$, $d^{n-1}y'$ dans les deux équations, on aura deux fonctions qui devront être nulles identiquement, & que comme elles contiennent y jusqu'à $d^{n-2}y$ & y' jusqu'à $d^{n-2}y'$, de même que les valeurs de $d^{n-1}y$, $d^{n-1}y'$, on n'aura qu'autant d'équations que de *coëfficiens indéterminés*, que ces *équations* seront en termes finis, & que le *terme connu ne manquera point dans toutes lorsque les proposées auront tous leurs rangs.*

On seroit parvenu à la même vérité, en observant que soit prise une fonction $A + B\,d^{n-1}y$, & qu'on la multiplie par

$$A' + B'\,d^{n-1}y + C'\,d^{n-1}y^2 + D\,d^{n-1}y^3 \text{ \&c.}$$

qu'on compare avec une proposée de la forme

$$A'' + B''\,d^{n-1}y + C''\,d^{n-1}y^2 \text{ \&c.}$$

en s'arrêtant à un terme $(d^{n-1}y)^{m-1}$ dans la série $A' + B'\,d^{n-1}y$ lorsque la série $A'' + B''\,d^{n-1}y$ &c. est au terme $(d^{n-1}y)^m$, que A, B, A', B' &c. A'', B'' &c. soient des séries de y jusqu'à $d^{n-2}y$; les séries A étant toujours plus élevées d'un degré que les séries B, les séries B plus élevées d'un degré que les series C. Cela posé, il est clair que le nombre des équations entre ces coëfficiens sera égal au nombre des termes dans la série A, plus au nombre des termes dans la série B, plus au nombre des termes dans la série C, &c. Or le nombre des coëfficiens indéterminés sera égal à celui des termes des séries A', B' & A'', B'', C'', &c. la série

A' étant du degré de A, B', & A' du degré de B; B'' du degré de C; donc le nombre des équations sera plus petit que celui des coëfficiens, & il restera indéterminée une fonction du degré de A''; or si l'on suppose que $A' + B' d^{n-1} y$ est une differentielle exacte, on aura entre les coëfficiens autant de conditions qu'il y a de termes dans une fonction B ou A'; donc, puisqu'une pareille fonction reste indéterminée, on pourra toujours avoir

$$\overline{A' + B' d^{n-1} y} \times \overline{A'' + B'' d^{n-1} y + C'' d^{n-1} y^2 \&c.}$$

égal à la proposée, $A' + B' d^{n-1} y$ étant une différentielle exacte, & les coëfficiens de A', B', étant donnés par des équations en termes finis. Donc; &c. On voit qu'ici les A'', B'', &c. contiennent un terme sans y, & que A', B', doivent être multipliés par e^{fx}, parce que sans ces conditions, la comparaison ne pourroit se faire, & les équations entre coëfficiens manqueroient de termes connus.

La même méthode s'appliquera au cas où l'on auroit trois variables & deux équations, & de même à un plus grand nombre de variables & d'équations, pourvu qu'on y ait également la proposée sans terme où il n'y a pas de y; que x dont la différence est constante, ne s'y trouve pas, & que le nombre des équations étant n, celui des variables en y comprenant x, sont $n + 1$.

Nous aurons donc toujours deux équations de l'ordre $n - 1$ en séries & de la forme convenable entre x, y & y'; appliquant donc à ces deux équations la première méthode developpée ci-dessus, j'aurai f par une équation du degré $2n - 2$, & traitant chaque différentielle exacte, comme j'ai traité dV, j'aurai en les appellant dz, dz', &c. $2n - 2$ différentielles exactes, si $n = 2$, z, & z' ne contiendront que y & y'; Donc, puisque on a deux de ces équations, que y & y' sont deux quantités très-petites, & dont on peut négliger une puissance m, il est clair que ne prenant les équations $z = 0$, $z' = 0$, que jusqu'au degré m, & éliminant y', on aura y sans avoir rien négligé que des puissances m de quantités nécessairement très petites si $n > 2$, Divisant dz, dz', &c. par e^{fx}, $e^{f'x}$, &c. on aura des équations en séries qui contiendront

$$y, \; dy, \; d^2y \ldots\ldots d^{n-2} y. \quad y' \; dy' + d^2y' \ldots\ldots d^{n-2} \; y'.$$

$$\Delta y, + d\Delta y \ldots\ldots d^{n-2} \; \Delta y. \quad \Delta y' + d\Delta y' \ldots\ldots d^{n-2} \; \Delta y'.$$

& en y faisant $\Delta y = y'$ & $\Delta y' = y''$, on aura $2n - 2$ équations qui contiendront

y,

$y, \ldots d^{n-2}y,\ y' \ldots d^{n-2}y',\ y'' \ldots d^{n-2}y''$. Prenant trois de ces équations, il ſuit de ce que j'ai dit ci-deſſus qu'on pourra en avoir trois autres auſſi en ſéries où ces $d^{n-2}y$, $d^{n-2}y'$, $d^{n-2}y''$, ne feront que ſous une forme linéaire; & ſi je cherche à les intégrer, alors j'aurai f par une équation du degré $3A - 6$ & $Bn - 6$ différentielles exactes ds, ds', ds'' &c. Si $n = 3$, comme ces équations ne contiennent en général que $d^{n-2}y$, $d^{n-2}y'$ $d^{n-2}y''$, elles ne feront dans ce cas que du premier ordre; donc leurs intégrales feront finies. Et comme on en a $3n - 6$ differentes, on en aura trois lorſque $n = 3$. Or ces trois équations s, s', s'', contiennent y, y', y'', quantités dont on peut négliger la m^e puiſſance; donc ne prenant les équations que jusqu'au degré m, & éliminant y' & y'', on aura y.

Si $n > 3$, on prendra ΔS, $\Delta S'$, $\Delta S''$ &c. & on aura des équations qui contiendront $y \ldots d^{n-3}y$, $y' \ldots d^{n-3}y'$, $y'' \ldots d^{n-3}y''$, $y''' \ldots d^{n-3}y'''$, $y''' = \Delta y''$. Prenant quatre de ces équations, les mettant ſous une forme convenable, & cherchant à les intégrer, on aura f par une équation du degré $4n - 12$; donc ſi $n = 4$, on aura en intégrant quatre intégrales finies entre y, y', y'' & y''', desquels on tirera y.

Si $n > 4$, on recommencera les mêmes opérations jusqu'à ce qu'on parvienne à n équations entre y, y', $y'' \ldots y'''^{\ldots n-1}$, qui ne contiennent que dy, $dy' \ldots dy'''^{n-1}$, & où f ſoit donné par une équation du degré n.

Jusqu'ici j'ai ſuppoſé que les racines etoient toutes inégales, ou du moins qu'il y en avoit autant d'inégales que de variables, plus une; ſans celà, les opérations que j'ai indiquées ne pourroient s'exécuter. Suppoſons maintenant que l'équation en f ait des racines égales, & dabord qu'il en ait deux ſi la propoſée eſt du ſecond ordre, en la multipliant elle devient $d^2 Y$, & par conſéquent on a immédiatement l'intégrale ſans différence. Si elle eſt d'un ordre ſupérieur, on a d'abord $n - 1$ équations en y & y', à cauſe des $n - 1$ valeurs de f, & une équation qui contient x; mais par la méthode ci-deſſus il ſuffit d'avoir deux équations différentes. S'il y a trois racines égales, & que l'équation ſoit du troiſiéme ordre, elle s'intégre immédiatement en termes finis; & ſi l'équation eſt plus élevée, on aura toujours deux équations différentes, ce qui eſt ſuffiſant ici. La même réflexion peut s'appliquer aux équations qui ont plus d'une variable, & en effet, dans ce cas, ſi $n - m$ eſt l'ordre de l'équation, & m le nombre des y & des équations, le nombre des racines égales ne peut être plus grand que $n - m$, à moins que les

équa-

équations ne ſoient pas réellement différentes entr'elles; ce qui ne peut avoir lieu ici, puisque les équations ſont toutes des intégrales ſuppoſées différentes. Ainſi lorsque chaque racine m aura $n - m - 1$ qui lui ſera égale, on aura une intégrale finie; & quand elle en aura moins, il reſtera un nombre d'équations différentes & ſans x, plus grand que $m + 1$, & il ſuffit d'én avoir $m + 1$. Ainſi l'on voit que ce ne ſera jamais qu'à la dernière intégration que l'on pourra être obligé d'avoir des x, & ce ne ſera que par l'inſpection du premier rang de cette dernière équation qu'on pourra juger ſi la méthode propoſée ici, donne ou ne donne pas d'équation ſéculaire.

Il ſuit encore de cette même méthode ci deſſus, que l'on aura toujours une équation ſans x entre n valeurs conſécutives de y, placées à des valeurs de x diſtantes de l'unité; donc différentiant cette intégrale par rapport aux différences finies, on n'aura point d'arbitraires, mais au lieu de ces arbitraires, $n + 1$ ordonnées conſécutives.

Suppoſons enſuite que nous ſachions que l'équation approchée entre y & x, eſt toujours donnée par une équation de la même forme avec des coëfficiens différens, il eſt clair qu'en employant pour la ſubſtitution une équation différentielle où les coëfficiens ſoient arbitraires, on aura par la méthode précédente une équation entre $n + 1$ y conſecutifs; que lorsqu'on prend les diſtances des x aſſez petites pour qu'on puiſſe ſuppoſer les $n + 1$ y appartenans à la même équation approchée, on pourra toujours tirer de n y connus, la valeur du $\overline{n + 1}^{e}$ & en dreſſer des tables qu'on pourra continuer auſſi loin qu'on voudra, ſans avoir beſoin de faire de nouveaux calculs.

On voit aiſément que quel que ſoit le nombre des variables qui entrent dans l'équation propoſée, ou pourra y appliquer les procédés que je viens de développer.

La même choſe a lieu dans les équations pour lesquelles j'ai donné (page 28.) une méthode qui ne demande point qu'on ait éliminé, & dans ce cas, ou aura entre un nombre donné des valeurs de variables, des équations ſans x, qui pourront être employées tant qu'elles donneront pour les quantités dont ou néglige quelque puiſſance, des valeurs très petites. Au reſte, cette manière d'avoir une équation entre pluſieurs valeurs conſécutives eſt légitime, puisqu'elle conſiſte ſeulement à faire évanouir x & les arbitraires par des différentiations aux différences finies.

Ainſi l'on aura par ce moyen pour les équations differentielles une méthode auſſi générale & auſſi ſure que celle que Newton a donnée pour les équations finies.

TA-

TABLEAU DES OPÉRATIONS

à faire pour trouver l'orbite parabolique d'une Comète, & pour s'assurer si une seule observation peut faire connoître l'orbite elliptique, & jusqu'à quel degré d'exactitude.

Ire. *Détermination approchée où l'on suppose l'orbite rectiligne.*

1. Soit l'origine des coordonnées au Soleil, & la ligne des absides de l'orbite terrestre, l'axe des x & le plan de l'Ecliptique celui des x & des y, les équations de l'orbite seront $x + ay + c = 0$, $z = ex + fy$.

2. Soient ensuite cinq observations (1), (2), (3), (4), (5); que les observations (1), (2), (3) soient exactes, et les observations (4) et (5) moins sures; Ces chiffres n'indiquent aucun ordre dans les temps de ces observations.

3. La distance perpendiculaire du point où la ligne menée du lieu de l'observation à la Comète, coupe l'Ecliptique, à la ligne des absides de la Terre, sera exprimée par B dans l'observation (1), par B' dans (2), par B'' dans (3), par B''' (4) et par B^{iv} dans (5).

4. La partie de la ligne des absides, comprise entre le Soleil et le point de rencontre de la ligne B avec la ligne des absides, sera exprimée par A dans l'observation (1), par A' dans (2), par A'' dans (3), par A''' dans (4) et par A^{iv} dans (5).

5. Que la tangente de l'angle formé sur l'Ecliptique par une paralèlle à la ligne des absides de l'orbite terrestre, et la projection de la ligne menée de l'Observateur à la Comète, soit X pour (1), X' pour (2), X'' pour (3), X''' pour (4), et X^{iv} pour (5).

6. Que

6. Que la tangente de l'angle de l'élevation de la Comète sur l'Ecliptique, divisée par le sinus de l'angle précédent; soit Y pour (1), Y' pour (2), Y'' pour (3), Y''' pour (4) et Y^{iv} pour (5); toutes ces quantités étant données par l'observation.

7. Soit fait selon l'article V de cet Essai, (page 16.) $a = a$, $f - a e = a'$, $c e = - a''$, $e = a'''$, $c f = a^{iv}$, $- A\,Y = p$, $- A'\,Y' = p'$ &c. $- B\,Y = q$, $- B'\,Y' = q'$ &c. $- B\,X + A = r$, $- B'\,X' + A' = r'$ &c. $- X = s$, $- X' = s'$, &c. $Y = t$, $Y' = t'$, &c. où l'on observera de donner à ces quantités dépendantes de l'observation les signes convenables à la situation de la Comète par rapport ou Soleil et à la Terre.

8. Ou aura les cinq équations,

$$p + q\,a + r\,a' + s\,a'' + t\,a''' + a^{iv} = o.$$
$$p' + q'\,a + r'\,a' + s'\,a'' + t'\,a''' + a^{iv} = o.$$
$$p'' + q''\,a + r''\,a' + s''\,a'' + t''\,a''' + a^{iv} = o.$$
$$p''' + dp''' + \overline{q''' + dq'''}\,a + \overline{r''' + dr'''}\,a' + \overline{s''' + ds'''}\,a'' + t'''\,a''' + a^{iv} = o.$$
$$p^{iv} + dp^{iv} + \overline{q^{iv} + dq^{iv}}\,a + \overline{r^{iv} + dr^{iv}}\,a' + \overline{s^{iv} + ds^{iv}}\,a'' + t^{iv}\,a''' + a^{iv} = o.$$

9. Soit $p - p' = P$, $p - p'' = P'$, $p - p''' = P''$, $p - p^{iv} = P'''$;
$q - q' = Q$, $q - q'' = Q'$, $q - q''' = Q''$, $q - q^{iv} = Q'''$;
$r - r' = R$, $r - r'' = R'$, $r - r''' = R''$; $r - r^{iv} = R'''$;
$s - s' = S$, $s - s'' = S'$, $s - s''' = S''$, $s - s^{iv} = S'''$;
$t - t' = T$, $t - t'' = T'$, $t - t''' = T''$, $t - t^{iv} = T'''$;

on aura les quatre équations,

$$P + Q\,a + R\,a' + S\,a'' + T\,a''' = o.$$
$$P' + Q'\,a + R'\,a' + S'\,a'' + T'\,a''' = o.$$
$$\overline{P'' - dp'''} + \overline{Q'' - dq'''}\,a + \overline{R'' - dr'''}\,a' + \overline{S'' - ds'''}\,a'' + T''\,a''' = o.$$
$$\overline{P''' - dp^{iv}} + \overline{Q''' - dq^{v}}\,a + \overline{R''' - dr^{iv}}\,a' + \overline{S''' - ds^{iv}}\,a'' + T'''\,a''' = o.$$

10. Faisant ensuite

$P\,Q' - Q\,P' = P_{,}$	$R\,Q' - Q\,R' = Q_{,}$
$P\,Q'' - Q\,P'' = P_{,}'$	$R\,Q'' - Q\,R'' = Q_{,}'$
$P\,Q''' - Q\,P''' = P_{,}''$	$R\,Q''' - Q\,R''' = Q_{,}''$
$S\,Q' - Q\,S' = R_{,}$	$T\,Q' - Q\,T' = S_{,}$
$S\,Q'' - Q\,S'' = R_{,}'$	$T\,Q'' - Q\,T'' = S_{,}'$
$S\,Q''' - Q\,S''' = R_{,}''$	$T\,Q''' - Q\,T''' = S_{,}''$

on aura les trois équations.

11. $P_{,} + Q_{,} a + R_{,} a'' + S_{,} a''' = o.$

$P_{,}' - P\,d q''' + Q\,d p''' + (Q_{,}' - R\,d q''' + Q\,d r''')\,a +$
$(R_{,}' - S\,d q''' + Q\,d s''')\,a'' + (S_{,}' - T\,d q''')\,a''' = o.$

$P_{,}'' - P\,d q^{IV} + Q\,d p^{IV} + (Q_{,}'' - R\,d q^{IV} + Q\,d r^{IV})\,a +$
$(R_{,}'' - S\,d q^{IV} + Q\,d s^{IV})\,a'' + (S_{,}'' - T\,d q^{IV})\,a''' = o.$

12. Faisant donc $P_{,} Q_{,}' - Q_{,} P_{,}' = P_{,,}$ | $P_{,} Q_{,}'' - Q_{,} P_{,}'' = P_{,,}'$
$R_{,} Q_{,}' - Q_{,} R_{,}' = Q_{,,}$ | $R_{,} Q_{,}'' - Q_{,} R_{,}'' = Q_{,,}'$
$S_{,} Q_{,}' - Q_{,} S_{,}' = R_{,,}$ | $S_{,} Q_{,}'' - Q_{,} S_{,}'' = R_{,,}'$

$-P_{,} R + Q_{,} P = M$ | $-Q_{,} Q = L$ | $P_{,} Q = N,$
$-P_{,} S + R_{,} P = M'$ | | $R_{,} Q = N',$
$-P_{,} T + S_{,} P = M''$ | | $S_{,} Q = N'',$

nous aurons les deux équations suivantes.

13. $P_{,,} + L\,d p''' + M\,d q''' + N\,d r''' +$
$(Q_{,,} + M'\,d q''' + N'\,d r''' + L\,d s''')\,a'' +$
$(R_{,,} + M''\,d q''' + N''\,d r''')\,a''' = o.$

$P_{,,}' + L\,d p^{IV} + M\,d q^{IV} + N\,d r^{IV} +$
$(Q_{,,}' + M'\,d q^{IV} + N'\,d r^{IV} + L\,d s^{IV})\,a'' +$
$(R_{,,}' + M''\,d q^{IV} + N''\,d r^{IV})\,a''' = o.$

14. Faisant ensuite, $P_{,,} Q_{,,}' - Q_{,,} P_{,,}' = P_{,,,}$
$P_{,,} Q_{,,}' - Q_{,,} R_{,,}' = Q_{,,,}$

$\left\{\begin{array}{ll} Q_{,,}' L = L_{,}, & Q_{,,}' M - P_{,,}' M' = M_{,}, \\ -Q_{,,} L = L_{,}', & -Q_{,,} M + P_{,,} M_{,}' = M_{,}', \\ & Q_{,,}' N - P_{,,}' N' = N_{,}, \; -P_{,,}' L = O_{,} \\ & Q_{,,} N - P_{,,} N' = N_{,}', \; -P_{,,} L = O_{,}' \end{array}\right\}$ Pour $P_{,,,}$.

$P_{,,} R_{,,}' - R_{,,} P_{,,}' = R_{,,,}$

$\left.\begin{array}{l} Q_{,,}' M'' - R_{,,}' M' = M_{,}'', \\ -Q_{,,} M'' + R_{,,} M' = M_{,}''' \\ Q_{,,}' N'' - R_{,,}' N' = N_{,}'', \; -R_{,,}' L = O_{,}'' \\ -Q_{,,} N'' + R_{,,} N' = N_{,}''' \; -R_{,,} L = O_{,}''' \end{array}\right\}$ Pour Q'''.

et $\left.\begin{array}{l} R_{,,}' L = L_{,,}, R_{,,}' M - P_{,,}' M'' = M_{,,}, R_{,,}' N - P_{,,}' N'' = N_{,,} \\ R_{,,} L = L_{,,}', R_{,,} M - P_{,,} M'' = M_{,,}', R_{,,} N - P_{,,} N'' = N_{,,}' \end{array}\right\}$ Pour $R_{,,,}$.

15. Nous en tirerons à cause de $q''' = \frac{P_{,,,} + dP_{,,,}}{Q_{,,,} + dQ_{,,,}}$, $a'' = \frac{R_{,,,} + dR_{,,,}}{Q_{,,,} + dR_{,,,}}$ et $e = \frac{R_{,,,} + d\,R_{,,,}}{P_{,,,} + d\,P_{,,,}}$;

$$e = \frac{R_{,,,} + L_{,,}\,d\,p''' + M_{,,}\,d\,q''' + N_{,,}\,d\,r_{,,,} + L_{,,}'d\,p^{\text{iv}} + M_{,,}'d\,q^{\text{iv}} + N_{,,}'d\,r^{\text{iv}}}{P_{,,,} + L_{,}\,d\,p''' + M_{,}\,d\,q''' + N_{,}\,d\,r''' + O_{,}\,d\,s''' + L_{,}'\,dp^{\text{iv}} + M_{,}'d\,q^{\text{iv}} + N_{,}'\,d\,r^{\text{iv}} + O_{,}'d\,s^{\text{iv}}}$$

16. Réduisant, nous aurons $e = \frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + \frac{\overbrace{P_{,,,}\,L_{,,} - R'''\,L_{,}}^{C}}{P^2_{,,,}}\,d\,p'''$

$$+ \frac{\overbrace{P_{,,,}\,L_{,,}' - R_{,,,}\,L_{,}'}^{D}}{P^2_{,,,}}\,d\,p^{\text{iv}} + \frac{\overbrace{P_{,,,}\,M_{,,} - R_{,,,}\,M_{,}}^{E}}{P^2_{,,,}}\,d\,q''' + \frac{\overbrace{P_{,,,}\,M_{,,}' - R\,M_{,}'}^{F}}{P^2_{,,,}}\,d\,q^{\text{iv}}$$

$$+ \frac{\overbrace{P'''\,N_{,,} - R_{,,,}\,N_{,}}^{G}}{P^2_{,,,}}\,d\,r''' + \frac{\overbrace{P_{,,,}\,N_{,,}' - R\,N_{,}'}^{H}}{P^2_{,,,}}\,d\,r^{\text{iv}} + \frac{\overbrace{R'''O_{,}}^{I}}{P^2_{,,,}}\,d\,s'''$$

$$+ \frac{\overbrace{R'''\;O_{,}'}^{K}}{P^2_{,,,}}\,d\,r^{\text{v}},$$ ou $e = \frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + C\,d\,p''' + D\,d\,p^{\text{iv}} + E\,d\,q''' + F\,d\,q^{\text{iv}} + G\,d\,r''' + H\,d\,r^{\text{iv}} + I\,d\,s''' + K\,d\,s^{\text{iv}}$.

17. Mais comme on a par la Trigonométrie Sphérique p''', q''', r''', s''', p^{iv}, q^{iv}, r^{iv}, s^{iv}, l'un en X''', l'autre en X^{iv}; on aura $d\,s''' = d\,X'''$, $d\,r''' = a_{,}'\,d\,X'''$, $d\,q''' = a_{,}''\,d\,X'''$, $d\,p''' = a_{,}'''\,d\,X$; de même $d\,s^{\text{iv}} = d\,X^{\text{iv}}$, $d\,r^{\text{iv}} = b'\,d\,X^{\text{iv}}$, $d\,q^{\text{iv}} = b''\,d\,X^{\text{iv}}$, $d\,p^{\text{iv}} = b'''\,d\,X^{\text{iv}}$; et faisant $d\,X''' = Z$, et $d\,X^{\text{iv}} = Z'$, où Z et Z' font de petites quantites, nous aurons.

$$e = \frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + \overbrace{C\,a_{,}''' + E\,a_{,}'' + G\,a_{,}' - I}^{A_{,}}Z + \overbrace{b''\,D + b'F + b\,H - K}^{B_{,}}Z'$$
$$= \frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + A_{,}\,Z + B_{,}\,Z'.$$

18. On

18. On a $f - ae = a'$, $f = a' + a e$, et $a = -\frac{P_{,}}{Q_{,}} - \frac{B_{,}}{Q_{,}} a'' - \frac{S_{,}}{Q_{,}} a'''$,

$a' = -\frac{P}{R} - \frac{Q}{R} a - \frac{S}{R} a'' - \frac{T}{R} a'''$; donc réduisant,

$$f = P_{IV} + Q_{V} a'' + R_{,,} a'''; \text{ or on a } a'' = \frac{R_{,,,}}{Q_{,,,}} + \overbrace{\frac{Q_{,,,} L_{,,}}{Q^2_{,,,}}}^{C'} dp''' + \overbrace{\frac{Q_{,,,} L_{,,}'}{Q^2_{,,,}}}^{D'} dp^{IV}$$

$$+ \overbrace{\frac{Q_{,,,} M_{,,} - R_{,,,} M_{,}''}{Q^2_{,,,}}}^{E'} dq''' + \overbrace{\frac{Q_{,,,} M'_{,,} - R_{,,,} M_{,}'''}{Q^2_{,,,}}}^{F'} dq^{IV} +$$

$$\overbrace{\frac{Q_{,,,} N_{,,} - R_{,,,} N_{,}''}{Q^2_{,,,}}}^{G'} dr''' + \overbrace{\frac{Q_{,,,} N'_{,,} - R_{,,,} N_{,}'''}{Q^2_{,,,}}}^{H'} dr^{IV} - \overbrace{\frac{R_{,,,} O_{,}''}{Q^2_{,,,}}}^{I'} ds''' -$$

$$\overbrace{\frac{R''' O_{,}'''}{Q^2_{,,,}}}^{K'} ds^{IV} = \frac{R_{,,,}}{Q_{,,,}} + \overbrace{C' a_{,}''' + E' a_{,}'' + G' a' + I' Z}^{A_{,}'} +$$

$$\overbrace{D' b'' + F' b' + H' b + K' Z'}^{B_{,}'} = \frac{R_{,,,}}{Q_{,,,}} + A_{,}' Z + B_{,}' Z';$$

$$a''' = -\frac{P_{,,,}}{Q_{,,,}} - \overbrace{\frac{Q_{,,,} L_{,}}{Q^2_{,,,}}}^{C''} dp''' - \overbrace{\frac{Q_{,,,} L_{,}'}{Q^2_{,,,}}}^{D''} dp^{IV} - \overbrace{\frac{Q_{,,,} M_{,} - R''' M_{,}''}{Q^2_{,,,}}}^{E''} dq'''$$

$$- \overbrace{\frac{Q_{,,,} M_{,}' - R_{,,,} M_{,}'''}{Q_{,,,}}}^{F''} dq^{IV} - \overbrace{\frac{Q''' N_{,} - R_{,,,} N_{,}''}{Q^2_{,,,}}}^{G''} dr'''$$

$$- \overbrace{\frac{Q''' N_{,} - R_{,,,} N_{,}'''}{Q^2_{,,,}}}^{H''} dr^{IV} - \overbrace{\frac{Q_{,,,} O_{,} - R_{,,,} O_{,}''}{Q^2_{,,,}}}^{I''} ds'''$$

$$-\frac{\overbrace{Q_{,,,}\ O_{,}'-R\ O_{,}'''}^{K''}}{Q^2_{,,,}}=-\frac{P_{,,,}}{Q_{,,,}}+\overbrace{C''\ a''+E''\ a'+G''\ a+I''}^{A_{,}''}\ Z$$

$$+\overbrace{D''\ b''+F''\ b'+H''\ b+K''}^{B_{,}''}\ Z'=-\frac{P_{,,,}}{Q_{,,,}}+A_{,}''\ Z+B_{,}''\ Z'.$$

19 Donc $f=P_{IV}+\overbrace{\frac{Q_{IV}\ R_{,,,}}{Q_{,,,}}-\frac{R_{IV}\ P_{,,,}}{Q_{,,,}}}^{C_{,}}+\overbrace{Q_{IV}\ A_{,}'+R^{IV}\ A_{,}''}^{D_{,}}$

$$+\overbrace{Q_{IV}\ B_{,}'+R^{IV}\ B_{,}''}^{E_{,}}\ Z'=C_{,}+D_{,}\ Z+E_{,}\ Z';$$

$$a=-\overbrace{\frac{P_{,}}{Q_{,}}-\frac{R_{,}R_{,,,}}{Q_{,}Q_{,,,}}+\frac{S_{,}P_{,,,}}{Q_{,}Q_{,,,}}}^{F'}-\frac{\overbrace{R\ A_{,}'-S_{,}\ A_{,}''}^{G'}}{Q_{,}}\ Z$$

$$-\frac{\overbrace{R_{,}\ B_{,}'-S_{,}\ A_{,}''}^{H'}}{Q_{,}}\ Z'=F_{,}+G_{,}\ Z+H_{,}\ Z';$$

$$c=-\frac{P_{,,,}}{Q'''}+A_{,}''\ Z+B_{,}''\ Z'.$$

20. Celà posé, nous avons de plus $c=\frac{a^{IV}}{f}$ et $a^{IV}=-p-q\ a-r\ a'$

$$-s\ a''-t\ a'''=-p+\frac{r\ P}{R}-\overline{q-\frac{r\ Q}{R}}\ a-\overline{s-\frac{r\ S}{R}}\ a''-\overline{t-\frac{T\ r}{R}}\ a'''=$$

$$\overbrace{-p+\frac{r\ P}{R}-\left\{q-\frac{r\ Q}{R}\right\}F_{,}-\left\{s-\frac{r\ S}{R}\right\}\frac{R'''}{Q'''}+\left\{t-\frac{T\ r}{R}\right\}\frac{P_{,,,}}{Q_{,,,}}}^{A_{,}'''}$$

$$-\overbrace{\left\{q-\frac{r\ Q}{R}\right\}G'-\left\{s-\frac{r\ S}{R}\right\}A_{,}'-\left\{t-\frac{r\ T}{R}\right\}A_{,}''}^{B_{,}'''}\ Z$$

$C_{,}'''$

$$\frac{C_{,}'''}{\left\{q-\frac{rQ}{R}\right\}H_{,}-\left\{s-\frac{rS}{R}\right\}B_{,}'-\left\{t-\frac{rT}{R}\right\}B_{,}''\,Z'.}$$

21. Donc $c = \frac{A_{,}''' + B_{,}'''Z + C_{,}'''Z'}{C_{,} + D_{,}Z + E_{,}Z'} = \frac{A'''}{C_{,}} + \frac{C_{,}B_{,}''' - A_{,}'''D_{,}}{C^{2}_{,}}Z$ $+ \frac{C_{,}C_{,}''' - A_{,}'''E_{,}}{C_{,}^{2}}Z' = I_{,} + \mathcal{J}Z + KZ'$. Donc comparant les deux valeurs de $C_{,}$ j'ai entre Z et Z', l'équation $I_{,} + \frac{P_{,,,}}{Q_{,,,}} + \mathcal{J}_{,} - A''_{,}Z + K_{,} - B''_{,}Z' = o$.

22. Soit T le temps écoulé entre les obſervations (1) et (2), et T' entre les obſervations (2) et (3), on aura $y' - y : T :: y'' - y' : T'$, $Ty - \overline{T' + T}y' + Ty'' = o$; ce qui donne l'équation $\frac{T'\overline{A - B\,X}e + TB'Y}{Xe + f - Y} - \frac{\overline{T + T'}\,\overline{A' - B'X'}e + \overline{T + T'}B'Y'}{X'e + f - Y'}$ $+ \frac{T\overline{A'' - B''X''}e + TB''Y''}{X''e + f - Y''} = o$; et réduiſant $\frac{a_{,}e + b_{,}}{f + c_{,}e + g_{,}} + \frac{a_{,}'e + b_{,}'}{f + c_{,}'e + g_{,}'}$ $+ \frac{a_{,}''e + b_{,}''}{f + c_{,}''e + g_{,}''} = o$; et mettant pour e et f leurs valeurs déterminées ci-deſſus, nous aurons $\frac{a_{,}e + b_{,}}{f + c_{,}e + g_{,}} = \frac{a_{,}\frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + b_{,}}{c_{,} + C_{,}\frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + g_{,}}$

$$+ \frac{\overline{c_{,} + c_{,} + \frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + g_{,}}\;a_{,}A_{,} - \overline{a\frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + b_{,}}\;D' + C_{,}A_{,}}{\overline{c_{,} + e_{,}\frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + g_{,}}^{\,2}}Z$$

 + C'

$$\frac{\overline{+ C_, + \frac{c_, R_{,,,}}{P_{,,,}} + g_, a_, B_, - \frac{a_, R^{\text{IV}}}{P_{,,,}} + b_, E_, + C_, B_,}}{\overline{C_, + \frac{c R_{,,,}}{P_{,,,}} + g_,}^{\,2}} Z' = \text{(en réduisant) } W$$

$+ W' Z + W'' Z'$; on aura de même $\frac{a_,' e + b_,'}{f + c_,' e + g_,'} = W_, + W_,' Z + W_,'' Z'$, en mettant dans les valeurs de W, W', W'' celles de $a_,', b_,', c_,', g_,'$, au lieu de $a_,, b_,, c_,, g_,$; et de même $\frac{a_,'' e + b_,''}{f + c_,'' + g_,''} = W_{,,} + W_{,,}' Z + W_{,,}'' Z'$, et par conséquent

$$W + W_, + W_{,,} + \overline{W' + W_,' + W_{,,}'}\, Z + \overline{W_, + W_{,,}' + W_{,,}''}\, Z' = 0.$$

23. Comparant les deux équations en Z et Z', qui étant réduites sont $\mu + \nu Z + \varpi Z' = 0$, $\mu_, + \nu_, Z + \varpi_, Z' = 0$, on aura $\nu \varpi_, - \nu_, \varpi Z' + \nu \mu_, = 0$; d'où réduisant $Z' = \phi$, & de même $Z = \frac{\mu \varpi_, - \mu_, \varpi}{\nu_, \varpi - \varpi_, \nu} = \psi$, mettant ces valeurs dans celles ci-dessus, on aura.

24. $a = F_, + G_, \psi + H_, \phi$,

$$c = \frac{P_{,,,}}{Q_{,,,}} + A_,'' \psi + B_,'' \phi,$$

$$e = \frac{R_{,,,}}{P_{,,,}} + A_, \psi + B_, \phi,$$

$$f = C_, + D_, \psi + E_, \phi;$$

et par conséquent l'orbite rectiligne sera déterminée.

Déter-

Détermination de l'Orbite parabolique.

L'équation de cette orbite est $A^2 + yAB - \frac{y^2}{4}B^2 + xA + \frac{xy}{2}B - \frac{x^2}{4} = 0$.

Je suppose que pour deux observations elle coïncide avec l'orbite rectiligne, & ne diffère que très peu de la troisieme, j'aurai les trois équations

$$A^2 + a\ AB + b\ B^2 + c\ A + e\ B + f\ = 0.$$
$$A^2 + a'\ AB + b'\ B^2 + c'\ A + e'\ B + f'\ = 0.$$
$$A^2 + a''\ AB + b''\ B^2 + \overline{c'' + dc''}\,A + \overline{e'' + de''}\,B + f'' + df'' = 0.$$

Eliminant A^2, j'ai

$$\overline{a - a'}\,AB + \overline{b - b'}\,B^2 + \overline{c - c'}\,A + \overline{e - e'}\,B + \overline{f - f'} = 0.$$
$$\overline{a - a''}\,AB + \overline{b - b''}\,B^2 + \overline{c - c'' - dc''}\,A + \overline{e - e'' - de''}\,B + \overline{f - f'' - df''} = 0;$$

et éliminant B^2, j'aurai $\overset{g}{\overline{\overline{a - a'}.\ \overline{b - b''} - \overline{a - a''}.\ \overline{b - b'}}}\,AB + \overset{b}{\overline{\overline{c - c'}.\ \overline{b - b''} - \overline{c - c''}.\ \overline{b - b'}}}$ $- \overset{i}{\overline{b - b'}}\,dc''A + (\overset{k}{\overline{\overline{e - e'}.\ \overline{b - b''} - \overline{e - e''}.\ \overline{b - b'}}}) - \overset{i}{\overline{b - b'}}\,de''B$ $+ (\overset{l}{\overline{\overline{f - f'}.\ \overline{b - b''} - \overline{f - f''}.\ \overline{b - b'}}}) - \overset{i}{\overline{b - b'}}.\ df'' = 0$; réduisant $gAB + bA + ide''A + KB + ide''B + l + idf'' = 0$; d'où je tire $A = \frac{-\overline{k + ide''}\,B - l \cdot idf''}{gB + b + ide''}$

et substituant cette valeur de A dans les deux premières équations, on aura après avoir réduit,

$$B^2 + \overline{C + D\ dc'' + E\ de'' + F\ df''}\,B + G + Hdc'' + Ide'' + L''df'' = 0.$$
$$B^2 + \overline{C' + D'dc'' + E'de'' + F'df''}\,B + G + Hdc'' + Ide'' + L''df'' = 0.$$

et $B = C'' + D''\,dc'' + E''\,de'' + F''\,df''$; et substituant cette valeur de B, une équation $C''' + D'''\,dc'' + E'''de'' + F'''\,df'' = 0$; mais $de'' = \frac{y''}{2}dc''$ et $df'' = \frac{-x''}{2}dc''$; donc on aura $de'' = \frac{-C'''}{D''' + E'''\frac{y}{2} - F'''\frac{x''}{2}}$;

x et y

x et y étant les valeurs des abſciſſes et des ordonnées priſes dans l'orbite rectiligne; on aura donc B, et A; connoiſſant donc, par conſéquent une valeur approchée de ce que dans les équations de l'article (11e.) on appelle $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{b}$, e, f, on pourra appliquer immédiatement la méthode que j'ai propoſée pour les approximations ſucceſſives.

Maintenant pour ſavoir ſi une ſeule apparition ſuffit pour l'orbite elliptique, on regardera les mêmes valeurs comme des valeurs approchées des quantités $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{b}$, e, et f pour *l'orbite elliptique, et on cherchera* la quantité p qui eſt nulle dans la parabole, et très petite *dans l'ellipſe fort excentrique par la méthode* des approximations ſucceſſives; et ſi p ainſi trouvé eſt beaucoup plus grand que *l'erreur* des obſervations, on pourra trouver l'orbite elliptique par une ſeule apparition, & prédire ſon retour à une quantité près égale à la différence de temps que peut produire l'erreur inſenſible des obſervations; quantité qui dépend du rapport de la valeur de p avec celle de l'erreur inſenſible des obſervations.

Je n'ai point *ici développé toutes les réductions, elles ſont* trop *faciles à faire; & il me ſuffit d'avoir montré par le détail de toutes ces opérations,* comment on pourra approcher à volonté de la véritable orbite parabolique ou elliptique, par une méthode analytique, ſure, & qui ne demande que des éliminations d'équations linéaires, ou de deux équations du ſecond degré.

J'ai employé ici pour trouver la *première approximation* pour l'orbite parabolique, les trois obſervations qui *avoient déjà été employées pour* avoir la *petite portion* d'orbite rectiligne. Si cette méthode paroiſſoit trop inéxacte, il eſt aiſé de voir qu'on pourroit s'en paſſer; en effet; prenant trois obſervations, nous aurons trois équations

$$\overbrace{A^2 + a\,A\,B + b\,B^2 + c\,A + g\,B + h = 0}^{(1)};$$

$$\overbrace{A^2 + a'\,A\,B + b'\,B^2 + c'\,A + g'\,B + h = 0}^{(2)}; \quad \overbrace{A^2 + a''\,A\,b + b''\,B^2 + c''\,A + g''\,B + h = 0}^{(3)};$$

et à cauſe de l'équation de la page (55), une quatrieme équation $B^2 + a'''\,A\,B + c'''\,A + g'''\,B + h''' = 0$.

J'éli-

J'éliminerai A^2 des trois premieres équations ; ce qui m'en donne deux nouvelles

$$\overline{a-a'}\,AB+\overline{b-b'}\,B^2+\overline{c-c'}\,A+\overline{g-g'}\,B+\overline{h-h'}=0;$$

$$\overline{a-a''}\,AB+\overline{b-b''}\,B^2+\overline{c-c''}\,A+\overline{g-g''}\,B+\overline{h-h''}=0;$$

& y mettant pour B^2 sa valeur tirée de l'équation quatrième, j'aurai

$$(\overline{a-a'}-\overline{b-b'}\,a''')\,AB+(\overline{c-c'}-\overline{b-b'}\,c''')\,A$$
$$+(\overline{g-g'}-\overline{b-b'}\,g''')\,B+\overline{h-h'}-\overline{b-b'}\,h'''=0.$$

$$(\overline{a-a''}-\overline{b-b''}\,a''')\,AB+(\overline{c-c''}-\overline{b-b''}\,c''')\,A$$
$$+(\overline{g-g''}-\overline{b-b''}\,g''')\,B+\overline{h-h''}-\overline{b-b''}\,h'''=0.$$

Eliminant AB et faisant $i=$

$$\frac{(\overline{g-g''}-\overline{b-b'}\,g''')\times(\overline{a-a'}-\overline{b-b'}\,a''')-(\overline{g-g'}-\overline{b-b'}\,g''')\times(\overline{a-a''}-\overline{b-b''}\,g''')}{(\overline{c-c'}-\overline{b-b''}\,c''')\times(\overline{a-a''}-\overline{b-b''}\,a''')-(\overline{c-c''}-\overline{b-b''}\,c''')\times(\overline{a-a'}-\overline{b-b'}\,a''')},$$

et $l=$

$$\frac{(\overline{h-h''}-\overline{b-b''}\,h''')\times(\overline{a-a'}-\overline{b-b'}\,a''')-(\overline{h-h'}-\overline{b-b'}\,h''')\times(\overline{a-a''}-\overline{b-b''}\,a''')}{(\overline{c-c'}-\overline{b-b'}\,c''')\times(\overline{a-a''}-\overline{b-b''}\,a''')-(\overline{c-c''}-\overline{b-b''}\,c''')\times(\overline{a-a'}-\overline{b-b'}\,a''')},$$

$A=iB+l.$ Substituant cette valeur dans deux des équations précédentes, nous aurons

$$\overline{i+a'''\,i}\,B^2+\overline{g'''+c'''i+a'''l}\,B+h'''+c'''l=0;$$

$$\overline{i^2+ac+b}\,B^2+\overline{2li+al+ci+g}\,B+l^2+cl+h=0.$$

Eliminant B^2, j'ai $B=\dfrac{\overline{l^2+cl+h}\times\overline{i+a'''i}-\overline{h'''+c'''l}\times\overline{i^2+ai+b}}{\overline{g'''+c'''i+a'''l}\times\overline{i^2+ac+b}-\overline{2li+al+ci+g}\times\overline{i+a'''c}}=m.$

13. Cela posé, je remarque que si on examine les équations ci-dessus, on verra que e & f étant déterminés à peu près, on aura, en les suppposant augmentés des petites quantités de & df, chacun des coëfficiens ci-dessus de la forme $a+a,\, de$

+

$+ a_{,,}\, df$, $b + b_{,}\, de + b_{,,}\, df$, &c. b, $b_{,}$ & $b_{,,}$, a, $a_{,}$ & $a_{,,}$ &c. étant donnés par les observations. Ainsi il faudroit substituer ces quantités au lieu des coëfficiens dans les valeurs de A de B trouvées ci-dessus; alors on auroit $B = m + m_{,}\, de + m_{,,}\, df$; A égal à une fonction semblable. Substituant ensuite au lieu de A & de B ces valeurs dans ce qui reste d'équations, on en aura deux de la forme $P + Q\, de + R\, df = o$, des quels on tirera des valeurs de de & df, & par conséquent de A & de B. Mais comme cette opération seroit très longue, on observera, pour la rendre plus courte, qu'on aura toujours $B = m + m_{,}\, df + m_{,,}\, df$, & $A = im + l + n_{,}\, de + n_{,,}\, df$, où m & $im + l$ sont les quantités trouvées ci-dessus, en mettant, pour les coëfficiens leurs valeurs, et regardant comme exactes celle de e et f. Faisant donc $m_{,}\, df + m_{,,}\, df = dm$, $n_{,}\, de + n_{,,}\, df = dn$ et $im + l = n$, on aura $A = m + dm$, $B = n + dn$; mettant donc les valeurs dans les équations ci dessus, elles deviendront

$$m^2 + amn + bn^2 + cm + gn + b + \overline{2m + an + c}\, dm + \overline{2bn + am + g}\, dn + \overline{mn\frac{da}{de} + n^2\frac{db}{db} + m\frac{dc}{de} + n\frac{dg}{de} + \frac{db}{de}}\, de + \overline{mn\frac{da}{df} + n^2\frac{db}{df} + m\frac{dc}{df} + n\frac{dg}{df} + \frac{db}{df}}\, df = o;$$

$$m^2 + a'mn + b'n^2 + c'm + g'n + b' + \overline{2m + a'n + c'}\, dm + \overline{2b'n + a'm + g'}\, dn + \overline{mn\frac{da'}{de} + n^2\frac{db'}{de} + m\frac{de'}{de} + n\frac{dg'}{de} + \frac{db'}{de}}\, de + \overline{mn\frac{da'}{df} + n^2\frac{db'}{df} + m\frac{dc'}{df} + n\frac{dg'}{df} + \frac{db'}{df}}\, df = o;$$

$$m^2 + a''mn + b''n^2 + c''m + g''n + b'' + \overline{2m + a''n + c''}\, dm + \overline{2b''n + a''m + g''}\, dn + \overline{mn\frac{da''}{de} + n^2\frac{db''}{de} + m\frac{de''}{de} + n\frac{dg''}{de} + \frac{db''}{de}}\, de$$

+

$$+\overline{mn\frac{da''}{df}+n^2\frac{db''}{df}+m\frac{de''}{df}+n\frac{dg''}{df}+\frac{dh''}{df}}\,df=o;$$

$$\text{et } n^2+a'''mn+c'''m+g'''n+h'''+\overline{a'''n+c'''}\,dm+\overline{2n+a'''m+g''}\,dn$$

$$+\overline{mn\frac{da'''}{de}+m\frac{de'''}{de}+n\frac{dg'''}{de}+\frac{dh'''}{de}}\,de$$

$$+\overline{mn\frac{da'''}{df}+m\frac{dc'''}{df}+n\frac{dg'''}{df}+\frac{dh'''}{df}}\,df=o.$$

Je les mets sous la forme

$$p+q\;dm+r\;dn+s\;de+t\;df=o.$$
$$p'+q'\;dm+r'\;dn+s'\;de+t'\;df=o.$$
$$p''+q''\;dm+r''\;dn+s''\;de+t''\;df=o.$$
$$p'''+q'''dm+r'''dn+s'''de+t'''df=o.$$

Or ces quatre équations sont semblables à celles de la pag. 52me de ce tableau des operations, en regardant comme nulles les quantités affectées de différences; donc les formules que j'y ai développées serviront à trouver les valeurs de dm, dn, de et df. Connoissant ces valeurs, on les ajoutera à celles qu'on a déjà pour A, B, e et f, et on aura les premières valeurs approchées de l'orbite parabolique.

Maintenant soient négligés dans l'équation de l'orbite elliptique dont l'équation est donnée table 1 n°. 12, les termes qui contiennent p^2, après la substitution de A pour a, de $X-BY$ pour Y et de $BX+Y$ pour X, elle devient de la forme suivante $A^2+aAB+bB^2+CA+gB+h+(iA^2+KAB+lB^2+mA+nB+Q)\,p=o$, où les coéfficiens sont des quantités données par l'observation & en e & f. Supposons donc que les valeurs approchées trouvées ci-dessus pour e, f, A & B, sont augmentées des quantités dA, dB, de, df, et que l'on cherche à déterminer dA, dB, de, df et p par la condition que ces quantités dont on néglige le quarré, satisfassent à cinq observations; on aura cinq équations de la forme

$$A^2+aAB+bB^2+CA+gB+h+\overline{2A+QB+C}\,dA+\overline{2aB+aA+g}\,dB$$

+

$$+ \overline{AB\frac{da}{de} + B\frac{db}{de} + A\frac{de}{de} + B\frac{dg}{de} + \frac{dh}{de}}\, de$$

$$+ \overline{AB\frac{da}{df} + B^2\frac{db}{df} + A\frac{dc}{df} + B\frac{dg}{df} + \frac{dh}{df}}\, df$$

$$+ \overline{iA^2 + KAB + CB^2 + mA + nB + q}\; p = o,$$

faiſant $p = de$, & les mettant toutes cinq ſous la forme $p + q\,dA + r\,dB + s\,dC + t\,de + df = o$; on verra qu'élle reviennent aux équations de la page 54. tableau, & qu'ainſi par les formules que j'y ai developpées, on parviendra à connoître dC. Ainſi lorsque cette valeur de dC ſera du même ordre que l'erreur inappréciable des obſervations, on ne pourra connoître, même à peu près, l'orbite elliptique. Si au contraire elle eſt d'un autre ordre, on la connoîtra à peu près par cette approximation, et on cherchera à en avoir une valeur plus approchée par la méthode expliquée dans l'article 3e. & qui conduira toujours pour chaque approximation à cinq équations de cette forme, $p = + q\,a + r\,a' + s\,a'' + t\,a''' + a^{IV} = o$, dont j'ai développé les formules.

Il ne me reſte plus maintenant qu'à donner la manière de déterminer en nombres les quantités que je ſuppoſe connues par l'obſervation. Pour celà je remarque que les coéfficiens numériques qui entrent dans toutes les formules que j'ai développées dans ce tableau, ſont des fonctions données des quatre quantités A, B, X & T, (page 51). Pour avoir maintenant ces quantités, je ſuppoſe que (les lettres ſuivantes déſignent des quantités différentes de celles que les mêmes lettres expriment dans les articles précédens.)

La diſtance du centre de la terre au Soleil au moment de l'obſervation, ſoit a; L'angle que la terre a parcouru autour du Soleil depuis ſon paſſage au périhélie, ſoit b; j'aurai la diſtance perpendiculaire de la terre à la ligne de ſes abſciſſes, diſtance priſe ſur l'Ecliptique a ſin b; & la diſtance du Soleil à la rencontre de cette perpendiculaire a cos. b; Soit enſuite l'angle que fait le Méridien du lieu de l'obſervation avec le Méridien perpendiculaire à l'Ecliptique dans le moment de l'obſervation c; & la diſtance du lieu au Pole d; on aura la diſtance perpendiculaire de la projéction du lieu ſur l'Ecliptique à celle de l'axe de la terre ſin. d ſin. c; & la diſtance du centre de la terre à la rencontre de cette diſtance perpendiculaire avec la projection de l'axe de la terre coſ. (de l'élev. du Pôle ſur l'Ecliptique) coſ. d; Donc l'angle que

que forme la projection du rayon mené du lieu de l'observation au centre de la terre, avec la projection de l'axe du monde, sera . . . A tang. $\frac{Sin.\ D\ Sin.\ C.}{cos.(\text{de l'élév. du pôle})\ cos.\ d} = e$; or en négligeant le mouvement de l'axe de la terre, cette projection fait avec le rayon de l'orbite un angle égal à la distance du centre de la terre d'avec l'Equinoxe. Soit donc cet angle, . . . f. j'aurai l'angle que fait la projection du rayon mené du centre de la terre à l'objet, avec le rayon vecteur $=$ . . . $e+f$; et l'angle de la même projection avec la ligne du périhélie . . . . $b+e+f$.

Or cette projection est $=$ . . . . $\sqrt{\text{sin.} D \text{ sin.} C^2 + \text{cos.}(\text{de l'élév.})^2 \text{cos.} d^2} = f'$

Donc on aura A . . . . $= a \text{ cos. } b + f' \text{ cos. } b + e + f$.

Et B . . . . $= a \text{ sin. } b + f' \text{ sin. } b + e + f$.

Maintenant pour avoir X, soit supposé un plan parallèle à l'Ecliptique, qui passe par le lieu de l'observation, une ligne parallèle à l'axe de la terre qui passe par le même lieu, et que l'angle de l'interfection des deux plans avec cette ligne, soit . . . . g, et l'angle que fait avec l'Ecliptique le rayon mené du centre de la terre au lieu de l'observation . . . . $g^\circ + h$, l'élévation de la Comète au-dessus de l'horizon . . . i, et sa distance du Méridien . . . . l. Nous aurons facilement en g et h l'angle que fait sur le plan parallèle à l'horizon la ligne d'intersection avec la projection de l'axe de la terre que j'appellerai g'; cela posé nous prendrons $g^\circ - g' \pm i$, qui sera l'angle que fait sur l'horizon la projection du rayon observé avec une ligne perpendiculaire à l'interfection; et par conséquent $\frac{\text{sin. } l}{\text{cos. } g^\circ - g' \pm i}$ sera la tangente de l'angle m que fait avec le plan de l'horizon un plan qui passe par la Comète, et qui a avec le plan de l'horizon la même interfection que le plan parallèle à l'Ecliptique; donc l'angle de ce plan avec le parallèle à l'Ecliptique sera $m+i$. Nous aurons en l, h et g l'angle que fait avec la projection de l'axe de la terre sur la parallèle à l'Ecliptique la projection du rayon d'observation; donc nous aurons X égal à la tangente de cet angle; nous aurons de plus l'angle du même rayon avec sa projection en $m+i$ et g', et par conséquent Y qui est la tangente de cet angle divisé par le sinus de l'angle dont X est la tangente.

Et en général, de quelque manière qu'on ait observé la Comète de l'horizon, on aura toujours X et Y exprimés par des quantités dépendantes des angles observés et des angles g, g' et h.

ADDITION,

A la piéce qui a pour devise.

Quæ an vera sint Dii sciunt quibus est cognitio veri. Nobis rimari illa, & conjecturâ ire in occulta tantum licet; nec cum fiduciâ inveniendi, nec sine spe.

L'auteur de cette piece ne se flatte point de répondre absolument à ce que L'académie paroit désirer, mais il espère qu'elle daignera lui tenir compte de ses efforts.

I.

L'équation d'une parabole rapportée au foier est $r = \frac{a}{1 + \cos \varphi}$ r est le rayon vecteur, a la moitié du paramétre, φ l'angle que le rayon vecteur fait avec l'axe.

Soient donc trois rayons consécutifs r, r', r'', auxquels correspondent les angles φ, $\varphi + x$, $\varphi + x'$.

Nous aurons $r = \frac{a}{1 + \cos \varphi}$, $r' = \frac{a}{1 + \cos \overline{\varphi + x}}$, $r'' = \frac{a}{1 + \cos \overline{\varphi + x'}}$;

ou éliminant a, $r . \overline{1 + \cos \varphi} = r' \; \overline{1 + \cos \overline{\varphi + x}}$

$r . \overline{1 + \cos \varphi} = r'' \; \overline{1 + \cos \overline{\varphi + x'}}$

Si l'on suppose qu'un corps se meuve dans cette parabole en vertu d'une force proportionnelle à la raison inverse du quarré des distances, on aura (si t & t' sont les temps employés à parcourir les angles x & x', & que l'intensité de la force centrale à une distance donnée soit connue) les équations suivantes.

$$t = \frac{m}{\sqrt{a}} \left\{ r'^2 \sin \overline{\varphi + x} \times \overline{1 + \tfrac{1}{2} \cos \overline{\varphi + x}} - r^2 \sin \varphi \times \overline{1 + \tfrac{1}{2} \cos \varphi}. \right\}$$

$$t' = \frac{m}{\sqrt{a}} \left\{ r''^2 \sin \overline{\varphi + x'} \times \overline{1 + \tfrac{1}{2} \cos \overline{\varphi + x}} - r^2 \sin \varphi \times \overline{1 + \tfrac{1}{2} \cos \varphi} \right\}$$

m étant un nombre conſtant.

Il eſt aiſé de voir que le nombre des inconnues eſt ici 7. & que nous avons cinq équations.

I I.

Je ſuppoſe maintenant que l'on ait trois obſervations de ce corps faites, par un obſervateur qui ſe meut dans un même plan différent de celui où le corps obſervé ſe meut, mais qui paſſe par le foier de la parabole, & je ſuppoſe que l'équation du plan de la parabole rapporté à celui de l'obſervateur ſoit

$$Z + AX + BY = 0.$$

les coordonneés étant perpendiculaires & leur origine étant priſe du foier de la parabole.

Cela poſé ſoient R, R', R'' les trois rayons menés de l'obſervateur au corps en mouvement.

Nous aurons $Z = MR$, $X = NR + V$, $Y = QR + T$ ...

$$Z' = M'R', \quad X' = N'R' + V', \quad Y' = Q'R' + T'$$

$$Z'' = M''R'', X'' = N''R'' + V'', Y'' = Q''R'' + T''$$

ou les X, les Y et les Z ſont les abſciſſes répondantes aux trois poſitions de l'obſervateur et les M, N, Q, V, T, des quantités donneés par l'obſervation.

Puisque par l'hypothèſe le corps doit toujours ſe trouver dans le même plan il faut que les trois équations.

$$Z + AX + BY = 0.$$
$$Z' + AX' + BY' = 0.$$
$$Z'' + AX'' + BY'' = 0.$$

aient lieu en même temps.

Eliminant donc A et B on aura.

$$1°.\ A = \frac{ZY' - Z'Y}{X'Y - ZY'} = \frac{ZY'' - Z''Y}{X''Y - XY''}$$

$$2°.\ B = \frac{ZX' - Z'X}{Y'X - YX'} = \frac{ZX'' - Z''X}{Y''X - X''Y}$$

$$3°.\ \overline{XZ' - X'Z} \times \overline{YZ'' - Y''Z} = \overline{XZ'' - ZX''} \times \overline{YZ' - ZY'}$$

4°. En mettant pour les X, Y, Z, leurs valeurs en R, R', R'' on aura $R^2 R' R'' + a R^2 R' + b R^2 R'' + c R R' R'' + e R R' + g R R'' + h R' R'' = 0$, où les coëfficiens font des quantités connues.

Maintenant foit *pour l'obfervation* I^{ere}, D la diftance de l'obfervateur au foier, & S l'angle entre D et R nous aurons.

$$R = D \cos S + \sqrt{r^2 - D^2 \sin S^2}$$

$$r = \sqrt{\overline{R - D\cos S}^2 + D^2 \sin S^2}$$

et femblablement pour les deux obfervations fuivantes.

$$R' = D' \cos S' + \sqrt{r'^2 - D'^2 \sin S'^2}$$

$$r' = \sqrt{\overline{R' - D' \cos S'}^2 + D'^2 \sin S'^2}$$

$$R'' = D'' \cos S'' + \sqrt{r''^2 - D''^2 \sin S''^2}$$

$$r'' = \sqrt{\overline{R'' - D'' \cos S''}^2 + D''^2 \sin S''^2}$$

Soit O l'angle que forme l'interfection du plan de la parabole et de celui de l'obfervateur avec le rayon vecteur r, $O + x$ fera l'angle que fera la même interfection avec le rayon r', et $O + x'$ l'angle de la même interfection avec le rayon r''

Nous aurons

$$\text{Sin } O = \frac{Z}{r} \times \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2 - B^2}$$

$$\text{Sin } O + x = \frac{Z'}{r'} \times \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2 - B^2}$$

$$\text{Sin}\, O + x' = \frac{Z''}{r''} \times \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2 - B^2}$$

Telles ſont les équations qui doivent conduire à la ſolution du problême.

Nous aurons donc d'abord deux cas à conſidérer; le premier, où les R, R', R'', différeront entre eux d'une quantité très petite: le ſecond, où ſeulement les quantités R, & R' différeront auſſi d'une quantité très petite.

Dans le I^er^ cas il eſt aiſé de voir que ſoit que l'on regarde auſſi comme très petits les angles x, et x', ſoit qu'on élimine indépendament de cette conſidération, on aura faiſant $R' = R \times \overline{1 + E}$, $R'' = R \times \overline{1 + E'}$ ou quatre équations en x, x', E et E', ou ſeulement deux équations en R et R', toutes quantites très petites.

Dans le 2d cas nous aurons en conſervant les mêmes dénominations deux équations entre E et E' où ſeulement une des quantités E et E' ſera très petite.

La manière de parvenir à ces équations eſt trop ſimple pour que nous nous arrêtions à la développer ici. Il ſe préſente donc deux queſtions générales. 1°. Etant données des équations entre des quantités toutes très petites et en nombre égal à ces quantités nouvelles. 2°. Etant données des équations entre des quantites dont une ſeulement eſt très petite en nombre égal à celui de ces quantités; les déterminer.

Prenant donc trois quantités x, x', x'' que je ſuppoſe toutes très petites et données par les trois équations $X = 0$, $X' = 0$, $X'' = 0$ je ferai en ſorte que X ſoit de la forme $a + b\,x + C$, & X' de la forme $a' + b'\,x' + C'$, & X'' de la forme $a'' + b''\,x'' + C''$; C, C', C'' étant des fonctions qui ne contiennent les inconnues x, x', x'' qu'au ſecond degré et aux degrés ſupérieurs; ce qui ſera poſſible toutes les fois qu'une ſeule des équations en x, x', x'', ne manquera point de terme linéaire, les équations étant ſous cette forme, j'aurai (par le Théorême inſeré dans les mémoires de Turin) les valeurs de x, x', x'', par une ſérie ordonnée par rapport aux puiſſances de $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ ſérie qui ſera convergente toutes les fois que x, x', x'' n'auront qu'une ſeule valeur très petite; on ſait que ſi elles en avoient deux, ou un plus grand nombre, la forme qui les repréſenteroit devroit avoir auſſi plus d'une valeur. Suppoſons qu'elles en aient deux, il ſuffira de mettre l'équation $X = 0$ ſous la

forme $a + bx + x^2 + C$, C étant une fonction du 3e degré et des degrés supérieurs nous en déduirons $x + \frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a + C'} = o$, C' étant une fonction du degré $\frac{3}{2}$, et le même Theorême s'appliquera à l'équation mise sous cette forme.

Soient maintenant plusieurs quantités y, y', y'' . . ., et x une quantité qu'on fait être très petite. Je suppose d'abord que nous n'en ayons que deux y, & x et deux équations. Je changerai ces deux équations en deux autres, l'une de la forme $a + x + Cx^2 + Dx^3 \ldots = o$ l'autre de la forme $a' + y + C'x^2 + D'x^3 \ldots = o$ auxquelles le même Théorême pourra s'appliquer. Si nous en avons trois y, y', x il faudra les mettre sous la forme $a + x + Cx^2 \ldots = o$, $a' + y + C'x^2 \ldots = o$ $a'' + y' + C''x^2 \ldots = o$. Les C, D . . étant des fonctions des variables y, y'.

Pour mettre les équations sous cette forme il suffira dans le 1er cas de multiplier les deux équations par des fonctions $X + Ry + Yy^2 \ldots + (X' + R'y \ldots)x$, $X_{,} + R_{,}y + Y_{,}y^2 \ldots + (X_{,}' + R_{,}'y + \ldots)x$, et determiner les X, R, Y de manière que la somme des deux équations données devienne de la forme ci-dessus. Dans le 2d on multiplieroit de même les équations par des fonctions $X + Ry + Yy' \ldots + (X' + R'y + Y'y' \ldots)x$, $X_{,} + R_{,}y + Y_{,}y' \ldots + (X_{,}' + R_{,}'y + Y_{,}'y')x$, $X_{,,} + R_{,,}y + Y_{,,}y' \ldots + (X_{,,}' + R_{,,}'y + Y_{,,}'y' \ldots)x$, et en déterminant les X, R, Y, de manière que la somme de ces équations ait la forme demandée.

Mais je crois devoir proposer la méthode suivante qui me paroit préférable à quelques égards. Soient données 4. équations entre 4. quantités y, y', y'' et x, où x est tres petit, je les mets sous la forme $A + Bx + Cx^2 \ldots = o$, $A' + B'x + C'x^2 = o$, $A'' + B''x + C''x^2 = o$, $A''' + B'''x + C'''x^2 = o$. Les A, B, C, . . étant des fonctions de y, y', y''. Je suppose que $A = 0 + 1 + 2 + 3 \ldots A' = 0' + 1' + 2' + 3' \ldots A'' = 0'' + 1'' + 2'' + 3'' \ldots A''' = 0''' + 1''' + 2''' + 3''' \ldots$ les caractères, 0, 1, 2, 3, designant ici les rang des fonctions A, A', A'', A''', ordonnées par rapport aux trois quantités y, y', y''. Il faudra maintenant que multipliant par une fonction différente de y, y', y'' . . chaque fonction A, la somme de ces produits devienne de la forme $a + y$, ou $a' + y'$, ou $a'' + y''$ ou $a''' + y'''$ les a étant des quantités indépendantes des x et y; appellant donc ces facteurs pour A, $0_{,} + 1_{,} + 2_{,} + 3_{,}$ . . pour A', $0_{,}' + 1_{,}' + 2_{,}' + 3_{,}'$ . . pour A'', $0_{,}'' + 1_{,}'' + 2_{,}''$

$3_{,}''$, pour $A_{,}'''$, $0_{,}''' + 1_{,}''' + 2_{,}''' + 3_{,}'''$ . . . la ſomme des facteurs ſera donc de la forme.

$$\overbrace{0\,0_{,} + 0'\,0_{,}' + 0''\,0_{,}'' + 0'''\,0_{,}'''}^{O}$$

$$\overbrace{+ 1\,0_{,} + 1_{,}\,0 + 1'\,0_{,}' + 1_{,}'\,0' + 1''\,0_{,}'' + 1_{,}''\,0'' + 1'''\,0_{,}''' + 1_{,}'''\,0'''}^{I}$$

$$\overbrace{+ 2\,0_{,} + 2_{,}\,0 + 2'\,0_{,}' + 2_{,}'\,0_{,}' + 2''\,0_{,}'' + 2_{,}''\,0'' + 2'''\,0_{,}''' + 2_{,}'''\,0'''}^{II}$$

$$\overbrace{+ 1\,1_{,} + 1'\,1_{,}' + 1''\,1_{,}'' + 1'''\,1_{,}'''}^{II}$$

. . . Le terme *O ne ſera* aſſujetti à aucune condition. Le terme *I devra devenir ou y, ou y′, ou y″*, & le terme *II* ainſi que les ſuivans devra être zéro. Je ſuppoſe maintenant que $1_{,} = p\,1' + p'\,1'' + p''\,1'''$ $1_{,}' = q\,1 + q'\,1'' + q''\,1'''$ & $1_{,}'' = r\,1 + r'\,1' + r''\,1'''$, $1_{,}''' = s\,1 + s'\,1' + s''\,1''$. Et de même $2_{,}$ égal à la ſomme de tous les termes de A', A'', A''' qui peuvent donner des termes du ſecond degré, $2_{,}'$ à la ſomme de tous les termes de A, A'', A''' dont la combinaiſon peut donner des termes du ſecond degré, & ainſi de ſuite, et ne répétant jamais dans les combinaiſons deux termes pris de la même fonction A, il en réſultera que ſubſiſtuant ces valeurs hypothétiques dans les termes *I*, *II*, &c. il ſeront de la même forme, c'eſt à dire, qu'ils contiendront tout les termes du même degré qui peuvent être formés par la combinaiſon, ou *o*. Cela poſé je ferai $1_{,} = a\,1 + a'\,1' + a''\,1'' + a'''\,1'''$, $1_{,}' = a_{,}\,1 + a_{,}'\,1' + a_{,}''\,1'' + a_{,}'''\,1'''$. Et ainſi de ſuite pour les autres 1; $2_{,} = b\,2 + b'\,2' + b''\,2'' + b'''\,2''' + b^{IV}\,1\,1 + b^{V}\,1\,1' + b^{VI}\,1\,1'' + b^{VII}\,1\,1''' + b^{VIII}\,1'^2 + b^{IX}\,1'\,1'' + b^{X}\,1'\,1''' + b^{XI}\,1''^2 + b^{XII}\,1''\,1''' + b^{XIII}\,1'''^2$ & de même pour les autres 2 & ſemblablement pour tous les autres termes. Si de plus on ſuppoſe aux $0_{,}$, $0_{,}'$, $0_{,}''$, $0_{,}'''$ une forme ſemblable en 0, $0'$, $0''$ & $0'''$ on aura toutes les conditions demandées, exprimées par des équations linéaires, et il eſt aiſé de voir que l'on parviendra à un point où la ſomme des coefficiens arbitraires ſurpaſſera celle des conditions & où par conſéquent ces équations ſeront réduites à la forme demandée. Il ſera à propos pour éviter toute erreur de laiſſer un de ces coefficiens indéterminé, ce qui eſt poſſible, & on le déterminera enſuite par la condition que la 1ere valeur de x ſoit très petite.

L'avantage de cette méthode ſur la méthode ordinaire d'éliminer conſiſte en ce qu'on n'aurait ici à éliminer que des équations qui reſtent les mêmes quels que

ſoient les o, les 1, les 2 &c. pourvu que le nombre des variables & le degré des équations reſtent les mêmes, qu'ainſi on pourrait dreſſer des tables qui donnaſſent pour chaque hypothêſe la valeur des coefficiens.

Ces tables ou d'autres ſemblables feroient d'autant plus importantes que la ſolution de la plupart des problêmes d'analyſe pratique ſe réduiſent à la ſolution d'un certain nombre d'équations linéaires avec des coefficiens numériques: & qu'en général on ne peut guère eſpérer de ſimplifier ces ſolutions qu'en ſimplifiant par des tables, la ſolution de ces équations. On trouve un exemple très important de ces ſimplifications dans un excellent mémoire de M. de la Grange ſur le mouvement des noeuds & des orbites des planêtes.

Si dans le problême que nous traitons ici il n'y a aucune quantité qu'on puiſſe ſuppoſer très petite, on prendra ſoit un des angles ſoit un des rayons vecteurs qu'on ſuppoſe égal a $p + x$, x étant très petit, on réſoudra le problême comme ſi p étoit connu, & enſuite on cherchera p en le déterminant par la condition que x doit être très petit.

La méthode la plus ſimple pour le problême des comêtes feroit peut-être de chercher en traitant les équations du problême à le réduire à trois équations entre une ligne, & deux angles. Suppoſant enſuite les 36. valeurs poſſibles de ces angles priſes de deux degrés & demi en deux degrés & demi, on dreſſeroit des tables de la valeur qu'ont dans ces 36. 36. ſuppoſitions les coefficiens en angles de ces équations, & on choiſiroit pour valeurs approchées celles qui donneroient à la ligne ſeule inconnue alors une valeur à-peu-près égale pour les 3 équations. Cette méthode comme on voit ne devroit être emploiée que pour les cas très rares, où l'on ne connoitroit que trois obſervations éloignées entr'elles. Le cas le plus commun où l'on connoit trois obſervations très voiſines ſe réſoudra plus ſimplement par la méthode indiquée ci-deſſus. On trouveroit dans le cas de cet article les formules aſſés ſimples pour déterminer dans quel cas 3 équations par exemple ont des racines à peu-près égales, & ces formules ſimplifieroient ce problême.

Le temps ne nous permet pas d'entrer dans de plus grands détails ſur cet objet.

ESSAI

ESSAI
SUR LA
SOLUTION DU PROBLÈME:
Déterminer l'orbite de la *Comète* par trois Observations.

PAR

M. TEMPELHOFF, Capitaine d'Artillerie, au Service de Sa Majesté le *Roi de Prusse*.

Per auras
Ignotæ regionis eunt, ...
. . . . altoque sub aethere fixis
Incursant stellis, ...
Et modo summa petunt, modo per decliva viasque
Præcipites, spatio terræ propiore feruntur.

OVID.

ESSAI

SUR LA

SOLUTION DU PROBLÈME:

Déterminer l'orbite de la Comète par trois Observations.

Problème.

§ 1. Le Foyer, & deux points de la Parabole étant donnés; trouver le Paramètre.

Solution. *Fig. I.*

§ 2. Soit *A F* l'axe, *D F*, *G F*, les rayons vecteurs, supposant l'angle *A F G* $= \phi$ & l'angle *A F D* $= \zeta$, le parametre $= p$, *D F* $= b$, *G F* $= a$, on aura par la nature de la Parabole.

$$a = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + \cos \phi} = \frac{\frac{1}{2} p}{2 \cos \frac{1}{2} \phi^2} \;\&\; b = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + \cos \zeta} = \frac{\frac{1}{2} p}{2 \cos \frac{1}{2} \zeta^2},$$

$$\text{Donc } \frac{a}{b} = \frac{\cos \frac{1}{2} \zeta^2}{\cos \frac{1}{2} \phi^2}. \quad \text{Mais } \zeta = \phi - (\phi - \zeta),$$

$$\text{Donc } \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \phi^2} \left[\cos \tfrac{1}{2} \phi \cos \tfrac{1}{2} (\phi - \zeta) + \sin \tfrac{1}{2} \phi \sin \tfrac{1}{2} (\phi - \zeta)\right]^2$$

Donc $\sqrt{\frac{a}{b}} = \cos \frac{1}{2} (\phi - \zeta) + \text{Tang} \frac{1}{2} \phi \sin \frac{1}{2} (\phi - \zeta)$

& par conféquent $\text{Tang} \frac{1}{2} \phi = \dfrac{\sqrt{\frac{a}{b}} - \cos \frac{1}{2} (\phi - \zeta)}{\sin \frac{1}{2} (\phi - \zeta)}$

$$1 + \text{Tang} \tfrac{1}{2} \phi^2 = \frac{a + b - 2 \cos \frac{1}{2} (\phi - \zeta) \sqrt{ab}}{b \sin \frac{1}{2} (\phi - \zeta)^2} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \phi^2}$$

ce qui donne $\frac{1}{2} p = \dfrac{2 \, a \, b \sin \frac{1}{2} (\phi - \zeta)^2}{a + b - 2 \cos \frac{1}{2} (\phi - \zeta) \sqrt{a \, b}}$

Corolaire I.

§ 3. Pofant la corde $D\,G = c$, on aura

$$4\, ab \,\text{Sin} \tfrac{1}{2} (\phi - \zeta)^2 = c^2 - (a - b)^2$$
$$4\, ab \,\text{Cos} \tfrac{1}{2} (\phi - \zeta)^2 = (a + b)^2 - c^2$$

donc $p = \dfrac{c^2 - (a - b)^2}{a + b - \sqrt{((a + b)^2 - c^2)}}$

Corolaire II.

§ 4. Or il eft facile de voir que

$$c^2 = [a + b + \sqrt{((a + b)^2 - c^2)}] \, [a + b - \sqrt{((a + b)^2 - c^2)}]$$

ce qui donne $p = \dfrac{[c^2 - (a - b)^2] \, [a + b + \sqrt{((a + b)^2 - c^2)}].}{c^2}$

Problême.

§ 5. Tout le refte demeurant le même; fi la chorde $D\,G$ eft auffi donnée; trouver l'aire du fecteur parabolique $D\,F\,G\,H\,D$

Solution.

§ 6. L'aire du fecteur eft compofée du triangle $F\,D\,G$ & du Segment $D\,H\,G$.

Il ne s'agit donc qu'à trouver ces deux parties ; pour cet effet tirons les ordonnées BD, CG, à l' Axe AF & ſoit.

$$AB = x \quad BD = y \quad AC = x' \quad CG = y'$$

Nous aurons le ſegment

$$DGH = \tfrac{2}{3}x'y' - \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{1}{2}(x' - x)(y' + y), \text{ or } x' = \frac{y'^2}{p} \;\&\; x = \frac{y^2}{p}$$

Poſant donc ce ſegment S on aura après la réduction

$$S = \frac{1}{6p}(y' - y)^3$$

Or $y' = a \sin \phi$ & $y = b \sin \zeta$

Donc $S = \frac{1}{6p}[a \sin \phi - b \sin \zeta]^3$.

Et puisque, $2a \sin \tfrac{1}{2}\phi \cos \tfrac{1}{2}\phi = a \sin \phi = \dfrac{\tfrac{1}{2}p \sin \tfrac{1}{2}\phi}{\cos \tfrac{1}{2}\phi}$

$$2b \sin \tfrac{1}{2}\zeta \cos \tfrac{1}{2}\zeta = b \sin \zeta = \frac{\tfrac{1}{2}p \sin \tfrac{1}{2}\zeta}{\cos \tfrac{1}{2}\zeta}$$

On aura $S = \dfrac{1}{6p}\left\{\tfrac{1}{2}p\left(\dfrac{\sin \tfrac{1}{2}\phi}{\cos \tfrac{1}{2}\phi} - \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}\zeta}{\cos \tfrac{1}{2}\zeta}\right)\right\}^3$

Ceſt-à-dire $= \dfrac{1}{6p}\left\{\dfrac{\tfrac{1}{2}p \sin \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta)}{\cos \tfrac{1}{2}\phi . \cos \tfrac{1}{2}\zeta}\right\}^3$

Or (§ 2) $4 \cos \tfrac{1}{2}\phi^2 \cos \tfrac{1}{2}\zeta^2 = \dfrac{\tfrac{1}{4}p^2}{ab}$

Donc enfin $S = \dfrac{1}{6p}[2 \sin \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta)\sqrt{ab}.]^3$

& ſubſtituant la valeur de p (§ 2)

$$S = \tfrac{1}{3}[a + b - 2\cos \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta)\sqrt{ab}] \times \sin \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta)\sqrt{ab}.$$

Ajoutant donc le triangle $FDG = \tfrac{1}{2}ab \sin (\phi - \zeta) = ab \sin \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta) \times \cos \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta)$ on aura après les réductions néceſſaires l'aire du ſecteur DFG

$$= \tfrac{1}{3}[a + b + \cos \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta)\sqrt{ab}] \sin \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta)\sqrt{ab}$$

ou bien, mettant à la place de $\cos \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta)$, $\sin \tfrac{1}{2}(\phi - \zeta)$ leurs valeurs §. 3. & nommant A l'aire du ſecteur DFG, on aura enfin

$$A = \tfrac{1}{6}[a + b + \tfrac{1}{2}\sqrt{((a + b)^2 - c^2})]\sqrt{(c^2 - (a - b)^2)}$$

Corolaire I.

§ 7. Nous avons donc § 4.

$$\frac{A}{\sqrt{p}} = \frac{\frac{1}{6}c\,[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-c^2)}]}{\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2-c^2)}]}}$$

& substituant la valeur de c

$$\frac{A}{\sqrt{p}} = \tfrac{1}{6}\,[a+b+\tfrac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-c^2)}] \times \sqrt{(a+b-\sqrt{((a+b)^2-c^2)}]}$$

Posant $a+b=f$ cette formule se change aisement en celle-ci

$$\frac{A}{\sqrt{p}} = \tfrac{1}{12}(f+f+\sqrt{(f^2-c^2)}).\,(\sqrt{(f-\sqrt{(f^2-c^2)})}$$

$$= \tfrac{1}{12}f\sqrt{(f-\sqrt{(f^2-c^2)}} + \tfrac{1}{12}(f+\sqrt{(f^2-c^2)}$$

or $c^2 = (f+\sqrt{(f^2-c^2)})\,(f-\sqrt{(f^2-c^2)}$

$$\text{Donc } \frac{A}{\sqrt{p}} = \tfrac{1}{12}f\sqrt{[f-\sqrt{(f-c^2)}]} + \tfrac{1}{12}c\sqrt{[f+\sqrt{(f^2-c^2)}]}$$

Corolaire.

§ 8. Cette équation se change par la transformation connue en celle-ci.

$$\frac{A}{\sqrt{p}} = \tfrac{1}{12}f\sqrt{\left\{\frac{f+c}{2}\right\}} - \tfrac{1}{12}f\sqrt{\left\{\frac{f-c}{2}\right\}} + \tfrac{1}{12}c\sqrt{\left\{\frac{f+c}{2}\right\}} + \tfrac{1}{12}c\sqrt{\left\{\frac{f-c}{2}\right\}}$$

$$= \tfrac{1}{12}(f+c)\sqrt{\left\{\frac{f+c}{2}\right\}} - \tfrac{1}{12}(f-c)\sqrt{\left\{\frac{f-c}{2}\right\}}$$

C'est-à-dire

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{1}{2}p}} = \tfrac{1}{12}(f+c)^{\frac{3}{2}} - (f-c)^{\frac{3}{2}}$$

Ou bien, mettant à la place de a, b, c les lignes de la figure

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{1}{2}p}} = \tfrac{1}{12}(DF+FG+DG)^{\frac{3}{2}} - (DF+FG-DG)^{\frac{3}{2}}$$

Remarque.

§ 9. Mr. Lambert a donné le premier cette formule dans un livre intitulé *Insignires Orbitarum Cometarum proprietates*; Ausſi cette démonſtration diffère peu de la ſienne. Au reſte on peut trouver encore d'autres, qui ſont connues à tous les Géometres; c'eſt par cette raiſon que je les citerai ſimplement ſans m'arréter à les démontrer encore une fois.

Lemme. I.

§ 10. Poſant la diſtance moyenne de la terre au *ſoleil* $= 1$, le temps que la Comète employe à parcourir l'Arc DG de la parabole $= T$, on aura $T = \frac{nA}{\sqrt{\frac{1}{2}p}}$ enſorte que $n = 116, 2648$.

Si l'on ſuppoſe la diſtance moyenne de la terre au ſoleil $= 100000$, on aura

$$T = \frac{A}{m\sqrt{\frac{1}{2}p}} \text{ enſorte que } m = 271989{,}4$$

Remarque.

§ 11. Ces formules ont eté demontrées également par Mrs. Euler dans ſa *Théoria Cometarum & Planetarum* et par Mr. Lambert dans l'ouvrage cité. Au reſte je ſupposerai toujours la diſtance moyenne de la terre an ſoleil $= 1$ en exprimant le temps en parties décimales du jour.

Corolaire.

§ 12. On aura donc § 9.

$$\frac{12}{n} T = (DF + FG + DG)^{\frac{3}{2}} - (DF + FG - DG)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{mais } \frac{12}{n} = 1{,}032127 \quad \text{[illegible]}.$$

$$\text{Donc } 0{,}1032127\, T = (DF + FG + DG)^{\frac{3}{2}} - (DF + FG - DG)^{\frac{3}{2}}$$

Lemme. II.

§ 13. Connoiſſant le paramètre p, le rayon *vecteur* R de la parabole; le temps que la comète employe pour arriver à ſon périhélie ſera

$$= \frac{n}{3\sqrt{2}} (R + \tfrac{1}{2}p) \sqrt{(R - \tfrac{1}{4}p)}$$

Corolaire. *Fig. I.*

§ 14. *Si donc on nomme* DF, R' & FG, R; le temps que la Comète employe à parcourir l'eſpace DG *ſera*

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} [(R + \tfrac{1}{2}p)\sqrt{(R - \tfrac{1}{4}p)} - (R' + \tfrac{1}{2}p)\sqrt{(R' - \tfrac{1}{4}p)}]$$

Lemme. III.

§ 15. Connoiſſant *l'Anomalie vraye*, ϕ *ou l'angle* AFG; le temps employé par la comète à *parcourir cette Anomalie ſera*

$$\tfrac{1}{2}p\sqrt{\tfrac{1}{2}p} \times \tfrac{1}{12}n (3 \text{ tang } \tfrac{1}{2}\phi + \text{ tang } \tfrac{1}{2}\phi^3)$$

Lemme. IV.

§ 16. Connoiſſant le demigrand-*Axe*, A, de l'*Orbite* de la Comète ſuppoſée une Ellipſe, le temps periodique ſera $A\sqrt{A}$ exprimé en anneés A & en parties déci-males de l'Année.

Remarque.

§ 17. Ces Lemmes renferment tout ce qu'on peut déſirer pour déterminer le mouvement d'une Comète dans une Orbite parabolique dont les dimenſions ſont connuës. Il ne reſte qu'a déterminer cette parabole à l'aide des Obſervations. *Or* comme ce problème a déjà été *traité* par les plus grands Géometres, qui ont fait tous les efforts pour le réſoudre; ce ſeroit donc peut-être une grande préſomption

de

de ma part d'espérer d'en venir à bout dans toute ſon étendue. Or comme l'illuſtre Académie des ſciences de *Berlin* n'exige que de perfectionner les méthodes connuës, j'oſerai en propoſer une, qui épargnera au moins aux Aſtronomes pluſieurs tentatives inutiles. Elle a de plus l'avantage de pouvoir être appliquée avec beaucoup de ſuccès aux autres planètes, & on pourra par ſon moyen déterminer avec facilité les Orbites des planètes par trois obſervations quelconques.

Problême.

§ 18. La poſition de la ligne des Noeuds & l'Inclinaiſon de l'Orbite d'une Planète ou Comète à l'ecliptique étant données; trouver ſa *diſtance* accourcie à la terre.

Solution. *Fig. II.*

§ 19. Soit *N O* la ligne des noeuds; *C* le lieu de la Comète. Abaisſant la perpendiculaire *C B* à l'écliptique & tirant les lignes *C D*, *B D* perpendiculairement à la ligne des noeuds, l'angle *C D B*, ſera l'inclinaiſon de l'Orbite.

Soit maintenant la terre en *A*, & *S* le ſoleid. Tirant la ligne *A S*, la poſition de la ligne des noeuds ſera determinée par l'angle *A S N* compris entre la diſtance de la terre au ſoleil & la ligne des noeuds. Qu'on tire maintenant la ligne *A B* qui ſera la diſtance accourcie de la Cométe à la terre, & qu'on la prolonge jusqu'a ce qu'elle rencontre la ligne des Noeuds en *N*.

Cela poſé ſoit: La longitude da Soleil $= \odot$, et celle de la Cométe $= C$, la latitude géocentrique de la Comète $= \lambda$, l'Inclinaiſon de l'Orbite $= \phi$, la longitude héliocentrique de la ligne des noeuds $= \omega$, l'angle $A\ S\ N = \zeta$, la diſtance de la terre au ſoleil $= a$, l'élongation de la Comète du ſoleil $= \varepsilon$, la diſtance accourcie $A\ B = x$.

On aura $\varepsilon = \odot - C$; $\zeta = \odot - \omega$; l'angle $S\ N\ A = \varepsilon - \zeta$; $A\,N = \dfrac{a \sin \zeta}{\sin(\varepsilon - \zeta)}$;

$B\,N = A\,B + \dfrac{a \sin \zeta}{\sin(\varepsilon - \zeta)}$; $B\,D = A\,B \sin(\varepsilon - \zeta) + a \sin \zeta$.

$B\,C = \operatorname{tang} \phi\,(A\,B \sin(\varepsilon - \zeta) + a \sin \zeta)$.

Mais nous avons aussi $BC = AB \tan\lambda$. Donc enfin $AB = \dfrac{a \sin\zeta}{\tan\lambda \cos\varphi - \sin(\varepsilon - \zeta)}$

Corolaire I.

§ 20. Soient A', A'' les lieux de la terre; C', C'', les lieux de la comète du temps de la 2de & 3me. Observation; $A'B'$, $A''B''$ les distances accourcies correspondantes; SA', SA'' les distances de la terre au soleil, $SA'B'$, $SA''B''$ les élongations de la comète, ASA', ASA'' les angles décrits par la terre entre la 1re et 2de, la 1re et 3me Observation, et soient

$$ASA' = \delta;\ SA'B' = \varepsilon';\ B'A'C' = \lambda$$
$$ASA'' = \delta';\ SA''B'' = \varepsilon'';\ B''A''C'' = \lambda$$
$$A'S = b;\ SA'' = c;\ A'B' = y;\ A''B'' = z$$

on aura $y = \dfrac{b.\ \sin(\zeta + \delta)}{\tan\lambda' \cos\varphi - \sin(\varepsilon' - \zeta - \delta)}$ & $z = \dfrac{c.\ \sin(\zeta + \delta')}{\tan\lambda'' \cos\varphi - \sin(\varepsilon'' - \zeta - \delta')}$

Corolaire. II.

§ 21. Divisant le numérateur & le dénominateur par $\sin\zeta$ & faisant $\dfrac{\cos\varphi}{\sin\zeta} = t$ & $\cos\zeta = u$, on aura les équations suivantes

1) $t \tan\lambda - u \sin\varepsilon + \cos\varepsilon = \dfrac{a}{x}$

2) $t \tan\lambda' - u \sin(\varepsilon' - \delta) + \cos(\varepsilon' - \delta) = \dfrac{b}{y}\left\{u \sin\delta + \cos\delta\right\}$

3) $t \tan\lambda'' - u \sin(\varepsilon'' - \delta') + \cos(\varepsilon'' - \delta') = \dfrac{c}{z}\left\{u \sin\delta' + \cos\delta'\right\}$

Corolaire. III.

§ 22. Au moyen de ces équations on trouve facilement la position de la ligne des noeuds, & l'inclinaison de l'Orbite; les distances x, y, & z étant données.

Car on aura, $u\left\{\sin\varepsilon\ \text{tang}\ \lambda' - \sin(\varepsilon'-\delta)\ \text{tang}\ \lambda - \frac{b}{y}\sin\delta\ \text{tang}\ \lambda\right\}$

$+\cos(\varepsilon'-\delta)\ \text{tang}\ \lambda - \cos\varepsilon\ \text{tang}\ \lambda' - \frac{b}{y}\cos\delta\ \text{tang}\ \lambda - \frac{a}{x}\ \text{tang}\ \lambda' = o.$

d'ou l'on tire la valeur de u et parconséquent aussi celle de t, au moyen des quelles on aura $\cos\phi = t\sin\zeta$.

Problême.

§ 23. Trouver une équation entre les distances accourcies de la Comète à la terre.

Solution.

§ 24. Chassant t et u des équations précédentes et faisant les réductions nécessaires. On parviendra à cette équation

$$\left.\begin{array}{l}[\text{Tang}\ \lambda\sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta)+\text{tang}\ \lambda'\sin(\varepsilon-\varepsilon''+\delta')+\text{tang}\ \lambda''\sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta)]\,xyz \\ +a\,[\text{Tang}\ \lambda'\sin(\varepsilon''-\delta')-\text{tang}\ \lambda''\sin(\varepsilon'-\delta)]\,yz \\ +b\,[\text{Tang}\ \lambda''\sin(\varepsilon+\delta)-\text{tang}\ \lambda\sin(\varepsilon''-\delta'+\delta)]\,xz \\ +c\,[\text{Tang}\ \lambda\sin(\varepsilon'+\delta'-\delta)-\text{tang}\ \lambda'\sin(\varepsilon+\delta')]\,xy \\ -abz\ \text{tang}\ \lambda''\sin\delta \\ +acy\ \text{tang}\ \lambda'\sin\delta' \\ -bcx\ \text{tang}\ \lambda\sin(\delta'-\delta)\end{array}\right\}=o.$$

qui se réduit à cette forme

$$Axyz+Bxy+Cxz+Dyz-Ex+Gy-Fz=o.$$

Corolaire I.

§ 25. Donc si l'on connoissoit le rapport entre ces distances, en sorte qu'on avoit $y = m x$ & $z = n x$, on auroit cette équation $A m n x^2 + (B m + C n + D m n) x - E + F m - G n = o$ d'ou l'on tireroit facilement la valeur de x.

Corolaire II.

§ 26. Si l'on avoit $y = m x + n$, $z = \mu x + \nu$ on auroit une équation du troisieme degré dont la résolution donneroit la distance x.

Remarque.

§ 27. Toute la difficulté se réduit donc à trouver ces équations § 26. ou le rapport des distances accourciès. Mais peut - être est - il presqu'impossible de trouver ce rapport à la rigueur, exprimé par une équation aussi simple que nous la supposons. Car quoiqu'en exprimant la valeur des rayons par ces distances accourcies et les substituant dans les équations § 11. dont on en pourra avoir trois, par les trois observations, et combinant avec elles celle - ci, on ait quatre équations entre x, y et z; ces équations étant débarrassées des radicaux, montent à des degrez si élevés qui leur résolution fait perdre toute patience. C'est pourquoi on doit être content, ce me semble, de trouver ces rapports d'une manière assès approchante & assès propre pour expédier le calcul.

Remarque.

§ 28. La méthode d'approcher de ce rapport est fondée sur cette circonstance, que les secteurs paraboliques $S\ C\ C'$, $S\ C'\ C''$ sont à-peu-près en raison des triangles $S\ C\ C'$, $S\ C'\ C''$, ou bien (en tirant la corde $C\ C''$, qui coupe le rayon $S\ C'$ du millieu en E,) en raison de $E\ C$ à $E\ C''$. Or on sait que les secteurs sont en raison des temps entre les Observations, dont les triangles $S C C'$, $S\ C'\ C''$ ou bien les droites $E\ C$, $E\ C''$ sont dans le même rapport. L'erreur qu'on commet par cette observation est d'autant plus petite, que les temps sont peu eloignés,

& à la vérite presque toujours imperceptible. C'eſt auſſi ſur cette Hypothêſe, que toutes mes recherches ſeront fondées.

Problême.

§ 29. La raiſon des triangles $C\ S\ C'$, $C'\ S\ C''$ étant donnée, trouver une équation entre les diſtances accourcies x, y. z.

Solution.

§ 30. Tirant les perpendiculaires $C\,D$, $C'\,D'$, $C''\,D''$, BD, $B'D'$, $B''\,D''$ à la ligne des Noeuds, & poſant les angles $CSO = D$, $C'S\,O = D'$, $C''SO = D''$ $S\,C = R$, $S\,C' = R'$; $S\,C'' = R''$ & conſervant au reſte les dénominations précédentes on aura

1) $R \cos D = x \cos (\varepsilon - \zeta) - a \cos \zeta$

2) $R \sin D.\ \cos \phi = x \sin (\varepsilon - \zeta) + a \sin \zeta$

3) $R' \cos D' = y \cos (\varepsilon' - \zeta - \delta) - b \cos (\zeta + \delta)$

4) $R' \sin D' \cos \varphi = y \sin (\varepsilon' - \zeta - \delta) + b \sin (\zeta + \delta)$

5) $R'' \cos D'' = z \cos (\varepsilon'' - \zeta - \delta') - c \cos (\zeta + \delta')$

6) $R'' \sin D' \cos \phi = z \sin (\varepsilon'' - \zeta - \delta') + c \sin (\zeta + \delta')$

D'ou l'on trouve facilement par quelques réductions fort ſimples

1) $R\,R' \sin (D' - D) \cos \phi = x\,y \sin (\varepsilon' - \varepsilon - \delta)$
$\qquad + b\,x \sin (\varepsilon + \delta) - a\,y \sin (\varepsilon' - \delta) - a\,b \sin \delta$

2) $R'R'' \sin (D'' - D') \cos \phi = y\,z \sin (\varepsilon'' - \varepsilon' - \delta' + \delta)$
$\qquad + c\,y \sin (\varepsilon' + \delta' - \delta) - b\,z \sin (\varepsilon'' - \delta') - b\,c \sin \delta' - \delta)$

3) $R\,R'' \sin (D'' - D) \cos \phi = x\,z \sin (\varepsilon'' - \varepsilon - \delta')$
$\qquad + c\,x \sin (\varepsilon + \delta') - a\,z \sin (\varepsilon'' - \delta') - a\,c \sin \delta'$

ſoit maintenant la raiſon des Triangles
$C\,S\,C' : C'\,S\,C'' = R\,R' \sin (D' - D) : R'\,R'' \sin (D'' - D') = \mu : \nu$, on aura cette équation.

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\frac{\nu}{\mu} x \sin(\varepsilon' - \varepsilon - \delta) - z \sin(\varepsilon'' - \delta' + \delta - \varepsilon')\right\} y \\
-\left\{\frac{\nu}{\mu} a \sin(\varepsilon' - \delta) + c \sin(\varepsilon' + \delta' - \delta)\right\} y \\
+\left\{\frac{\nu}{\mu} x \sin(\varepsilon + \delta) + z \sin(\varepsilon'' - \delta' + \delta)\right\} b \\
-\left\{\frac{\nu}{\mu} a \sin\delta - c \sin(\delta' - \delta)\right\} b
\end{array}\right\} = 0$$

Corolaire.

§ 31. De cette équation on tire

$$y = \frac{\nu b x \sin(\varepsilon+\delta) + \mu b z \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta) - b(\nu a \sin\delta - \mu c \sin(\delta'-\delta))}{\nu a \sin(\varepsilon'-\delta) + \mu c \sin(\varepsilon'+\delta'-\delta) - \nu x \sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta) + \mu z \sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta)}$$

substituant cette valeur dans l'expression $R' R'' \sin(D''-D') \cos\phi$, on aura

$$R' R'' \sin(D''-D') \cos\phi = -\frac{\nu}{\mu} b \, \frac{\left\{\begin{array}{l} a c [\sin(\varepsilon'+\delta'-\delta) \sin\delta + \sin(\varepsilon'-\delta) \sin(\delta'-\delta)] \\ - c x [\sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta) \sin(\delta'-\delta) + (\varepsilon'+\delta'-\delta) \sin(\varepsilon+\delta)] \\ + a z [\sin(\varepsilon'-\delta) \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta) + \sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta) \sin\delta] \\ - x z [\sin(\varepsilon+\delta) \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta-\varepsilon') + \sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta) \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta)] \end{array}\right\}}{\frac{\nu}{\mu} a \sin(\varepsilon'-\delta) + c \sin(\varepsilon'+\delta'-\delta) - \frac{\nu}{\mu} x \sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta) + z \sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta)}$$

Or $\sin\delta \sin(\varepsilon'+\delta'-\delta) + \sin(\varepsilon'-\delta) \sin(\delta'-\delta) = \sin\varepsilon' \sin\delta'$

$\sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta) \sin(\delta'-\delta) + \sin(\varepsilon'+\delta'-\delta) \sin(\varepsilon+\delta) = \sin\varepsilon' \sin(\varepsilon+\delta)$

$\sin(\varepsilon'-\delta) \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta) + \sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta) \sin\delta = \sin\varepsilon' \sin(\varepsilon''-\delta')$

$\sin(\varepsilon+\delta) \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta-\varepsilon') + \sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta) \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta) = \sin\varepsilon' \sin(\varepsilon''-\varepsilon-\delta')$

donc on aura $R' R'' \sin(D''-D') \cos\phi =$

$$\frac{\frac{\nu}{\mu} b \sin \varepsilon' \left\{ x z \sin(\varepsilon'' - \varepsilon - \delta) + c x \sin(\varepsilon + \delta') - a z \sin(\varepsilon'' - \delta') - a c \sin \delta' \right\}}{\frac{\nu}{\mu} a \sin(\varepsilon' - \delta) + c \sin(\varepsilon' + \delta' - \delta) - \frac{\nu}{\mu} x \sin(\varepsilon' - \varepsilon - \delta) + z \sin(\varepsilon'' - \varepsilon' - \delta + \delta)}$$

c'est - à - dire § 29. $R' R'' \sin (D'' - D') \cos \phi =$

$$\frac{\frac{\nu}{\mu} b \sin \varepsilon' R R'' \sin (D'' - D) \cos \phi}{\frac{\nu}{\mu} a \sin (\varepsilon' - \delta) + c \sin (\varepsilon' + \delta' - \delta) - \frac{\nu}{\mu} x \sin (\varepsilon' - \varepsilon - \delta) + z \sin (\varepsilon'' - \varepsilon' - \delta + \delta)}$$

ou bien par ce que nous avons trouvé au commencement de ce §phe.

$$R R'' \sin (D'' - D') = \frac{\frac{\nu}{\mu} y \sin \varepsilon' R R'' \sin (D'' - D)}{\frac{\nu}{\mu} x \sin (\varepsilon + \delta) + z \sin (\varepsilon'' - \delta' + \delta) - \frac{\nu}{\mu} a \sin \delta + c \sin \delta'' - \delta}$$

Donc $\dfrac{R R'' y \sin (D'' - D)}{R' R'' \sin (D'' - D')} = \dfrac{\frac{\nu x}{\mu} \sin (\varepsilon + \delta) + z \sin (\varepsilon'' - \delta' + \delta) - \frac{\nu}{\mu} a \sin \delta + c \sin (\delta' - \delta)}{\frac{\nu}{\mu} \sin \varepsilon'}$

Remarque.

§ 32. Si les deux premières observations ont été faites, lorsque la Comète étoit dans la ligne des noeuds on aura $D = 0 = C S O$, $D' = C' S O = 180$

$D'' = C'' S O = 180^\circ + C'' S N$ & $\mu = o$. Donc auſſi $D' - D = 180$ $D'' - D' = C' S N$; $D'' - D = 180^\circ + C S N$ d'ou l'on tire 1) $x y \sin(\varepsilon' - \varepsilon - \delta) + b x \sin(\varepsilon + \delta) - a y \sin(\varepsilon' - \delta) - a b \sin \delta = o$.

2de puisque $\sin(D'' - D') = - \sin(D'' - D)$

on trouve $\dfrac{R' R'' \cos \varphi \sin(D'' - D)}{R'' R \cos \phi \sin(D'' - D)} = - \dfrac{R'}{R}$ ou bien

$$\frac{y z \sin(\varepsilon'' - \varepsilon' - \delta' + \delta) + c y \sin(\varepsilon' + \delta' - \delta) - b z \sin(\varepsilon'' - \delta' + \delta) - b c \sin \delta' - \delta}{x z \sin(\varepsilon - \varepsilon'' + \delta') + c x \sin(e + \delta') - a z \sin(\varepsilon'' - \delta') - a c \sin \delta} = - \frac{R'}{R}$$

Problême.

§ 33. Les mêmes conditions ſubſiſtans encore, trouver une équation entre x & z.

Solution. *Fig. III.*

§ 34. Soit la latitude héliocentrique de la Comète à la ſeconde Obſervation, en $C' = \psi$, on aura $R' \sin \psi = y \operatorname{tang} \lambda'$; qu'on abaiſſe la perpendiculaire $E D$ à l'écliptique, on aura $D E = S E \sin \psi$ & $C B - E D : E D - C'' B'' = C E : C'' E = R R' \sin(D' - D) : \sin(D'' - D') R' B''$; ou bien $x \operatorname{tang} \lambda - S E. \sin \psi : S E. \sin \psi - z \operatorname{tang} \lambda'' = \mu : \nu$ donc $S E \sin \psi = \nu\, x \operatorname{tang} \lambda + \mu\, z \operatorname{tang} \lambda''$

Mais nous avons auſſi, comme on voit aiſément $R. \cos(D' - D) - S E : S E - R'' \cos(D'' - D') = \mu : \nu$

donc $S E = \dfrac{\nu R \cos(D' - D) + \mu R'' \cos(D'' - D')}{\mu + \nu}$

ou bien puisque $\mu : \nu = R. \sin(D' - D) : R'' \sin(D'' - D')$

$$S E = \frac{\nu}{\mu + \nu} R. \frac{\sin(D'' - D)}{\sin(D'' - D')}$$

ſubſtituant donc on aura $\dfrac{\nu R. \sin(D'' - D)}{\sin(D'' - D')} . \dfrac{y \operatorname{tang} \lambda'}{R'} = \nu\, x \operatorname{tang} \lambda + \mu\, z \operatorname{tang} \lambda''$

Et

Et combinant avec cette équation celle que nous avons trouvée à la fin du §. 30. on aura

$$\nu\left\{\frac{\nu x}{\mu}\sin(\varepsilon+\delta)+z\sin(\varepsilon''-\delta'+\delta)-\frac{\nu}{\mu}a\sin\delta+c\sin(\delta'-\delta)\right\}\operatorname{tang}\lambda'$$

$$=\left\{\nu x\operatorname{tang}\lambda+\mu z\operatorname{tang}\lambda''\right\}\frac{\nu}{\mu}\sin\varepsilon';$$ d'où l'on tire enfin

$$z=\frac{\frac{\nu}{\mu}x\left\{\sin(\varepsilon+\delta)\operatorname{tang}\lambda'-\operatorname{tang}\lambda\sin\varepsilon'\right\}+\left\{c\sin(\delta'-\delta)-\frac{a\nu}{\mu}.\sin\delta\right\}\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{tang}\lambda''\sin\varepsilon'-\operatorname{tang}\lambda'\sin(\varepsilon''-\delta'+\delta)}$$

qui est l'équation demandée.

Corolaire I.

§ 34. *Substituant cette valeur de z* (§ 29) dans l'équation, on aura, après avoir fait les réductions nécessaires.

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}[\operatorname{Tang}\lambda\sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta)+\operatorname{tang}\lambda'\sin(\varepsilon-\varepsilon''+\delta')\\
+[\operatorname{Tang}\lambda''\sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta)\end{array}\right\}\frac{\nu}{\mu}.\,x\,y\\
\left.\begin{array}{l}+\frac{\nu}{\mu}a\left\{\operatorname{Sin}(\varepsilon''-\delta')\operatorname{tang}\lambda'-\operatorname{tang}\lambda''\sin(\varepsilon'-\delta)\right\}\\
+c\,[\operatorname{Tang}\lambda'\sin\varepsilon'-\operatorname{tang}\lambda''\sin(\varepsilon'+\delta'-\delta)]\end{array}\right\}y\\
+\frac{\nu}{\mu}b.\left\{\operatorname{Tang}\lambda''\sin(\varepsilon+\delta)-\operatorname{tang}\lambda\sin(\varepsilon''-\delta'+\delta)\right\}x\\
+b.\operatorname{tang}\lambda''\left\{c\sin(\delta'-\delta)-\frac{\nu a}{\mu}\sin\delta\right\}
\end{array}\right\}=0$$

Corolaire. II.

§ 35. Puisque par § 34, $\frac{SE}{R'} = \frac{\nu}{\mu+\nu} . \frac{R}{R'} . \frac{\sin (D''-D)}{\sin (D''-D')}$

si l'on substitue la valeur de y trouvée § 29, on aura

$$\frac{SE}{R'} = \frac{\left\{\frac{\nu}{\mu} a \sin(\varepsilon'-\delta) + c \sin(\varepsilon'+\delta'-\delta) - \frac{\nu}{\mu} x \sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta) + z \sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta)\right\}}{\frac{\mu+\nu}{\mu} b \sin \varepsilon'}$$

Donc $\frac{\nu}{\mu} a \sin(\varepsilon'-\delta) + c \sin(\varepsilon'-\delta'+\delta) - \frac{\nu}{\mu} x \sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta)$

$+ z \sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta) = \frac{\mu+\nu}{\mu} . b \sin \varepsilon' \frac{SE}{R'}$

Corolaire. III.

§ 36. Substituant dans cette équation la valeur de z trouvée § 33. on aura la valeur de x exprimée, ensorte que

$$x = \frac{\frac{\nu}{\mu} a \left\{\text{Tang}\, \lambda'' \sin(\varepsilon'-\delta) - \text{tang}\, \lambda' \sin(\varepsilon''-\delta')\right\} + c \left[\text{tang}\, \lambda'' \sin(\varepsilon'+\delta'-\delta) - \text{tang}\, \lambda' \sin \varepsilon''\right] + \frac{\mu+\nu}{\mu} b \left\{\text{tang}\, \lambda' \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta) - \text{tang}\, \lambda'' \sin \varepsilon'\right\} \zeta}{\frac{\nu}{\mu}\left\{\text{tang}\, \lambda \sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta) + \text{tang}\, \lambda' \sin(\varepsilon-\varepsilon''+\delta') + \text{tang}\, \lambda'' \sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta)\right\}}$$

posant $\zeta = \frac{SE}{R'}$.

Corolaire IV.

§ 37. Cette valeur de x étant substituée § 34. donne

$$y = \frac{\frac{\nu}{\mu} x \left\{ \text{tang } \lambda'' \text{ sin } (\varepsilon + \delta) - \text{tang } \lambda \text{ sin } (\varepsilon'' - \delta' + \delta) \right\} + [c \text{ sin } (\delta' - \delta) - a \text{ sin } \delta] \text{ tang } \lambda''}{\frac{\mu + \nu}{\mu} . \left\{ \text{tang } \lambda'' \text{ sin } \varepsilon' - \text{tang } \lambda' \text{ sin } \varepsilon'' \right\} \zeta}$$

Corolaire V.

§ 38. Sustituant encore la valeur trouvée de x dans l'équation précédente on aura

$$y = \frac{\frac{\nu}{\mu} a \left\{ \text{tang } \lambda'' \text{ sin } \varepsilon - \text{tang } \lambda \text{ sin } (\varepsilon'' - \delta') \right\} + c \, [\text{tang } \lambda'' \text{ sin } (\varepsilon + \delta) - \text{tang } \lambda \text{ sin } \varepsilon''] - \frac{\mu + \nu}{\nu} . b \left\{ \text{tang } \lambda \text{ sin } (\varepsilon'' - \delta' + \delta) - \text{tang } \lambda'' \text{ sin } (\varepsilon + \delta) \right\} \zeta}{\frac{\mu + \nu}{\nu} . \zeta \left\{ \text{tang } \lambda \text{ sin } (\varepsilon'' - \varepsilon' - \delta' + \delta) + \text{tang } \lambda' \text{ sin } (\varepsilon - \varepsilon'' + \delta') + \text{tang } \lambda'' \text{ sin } (\varepsilon' - \varepsilon - \delta) \right\}}$$

Corolaire. VI.

§ 39. On trouvera de même

$$z = \frac{\nu}{\mu} a . \left\{ \text{Tang } \lambda' \text{ sin } \varepsilon - \text{tang } \lambda \text{ sin } (\varepsilon' - \delta) \right\}$$
$$+ c \, [\text{tang } \lambda' \text{ sin } (\varepsilon + \delta') - \text{tang } \lambda . \text{ sin } (\varepsilon' + \delta' - \delta)]$$

$$+ \frac{\mu + \nu}{\nu} . b \left\{ \text{Tang } \lambda \text{ sin } \varepsilon' - \text{tang } \lambda' \text{ sin } (\varepsilon + \delta) \right\} \zeta$$

$$\overline{\text{Tang } \lambda \text{ sin } (\varepsilon'' - \delta' + \delta - \varepsilon') + \text{tang } \lambda' \text{ sin } (\varepsilon - \varepsilon'' + \delta') + \text{tang} \lambda'' \text{ sin } (\varepsilon' - \varepsilon - \delta)}$$

Remarque.

§ 40. Nous voilà donc arrivés à trois équations assès simples, qui expriment les distances accourcies x, y & z par une seule inconnue ζ, que nous avons supposée exprimer la raison de $SE : SC'$ ou $\frac{SE}{R'}$. Or comme nous avons trouvé § 24. une équation entre x, y & z, cèlà nous pourroit tenter d'y substituer les valeurs de x, y, z que non avons trouvées dans les §phes précédentes, & nous flatter d'une solution complette du problème en question. J'étois moi même, je l'avoue, dans le cas, & j'arrivois à une équation de cette forme

$$A x z + B x + C z + D = o$$

Dans la quelle tous les coefficiens etoient d'elles même $= o$ savoir $A = o$; $B = o$; $C = o$; $D = o$. Mais enfin réflechissant un peu sur ce résultat, au quel je ne m'étois pas attendu, & qui me paroissoit extrêmement paradoxe, je trouvois enfin, que la raison en étoit, que dans le cas du § 24. j'avois supposé, que les points C, C', C'' sont dans un même plan; ce qui étant supposé aussi tacitement dans les autres recherches, produit cette équation fort singulière au premier abord.

Remarque. II.

§ 41. Cette équation § 24. paroit donc, être tout à fait superflue, & à la vérité nous aurions pû nous en dispenser. Cependant elle ne laissera pas d'être fort utile dans la pratique. Car comme ordinairement on a plusieurs observations d'une même Comète, on peut trouver à l'aide de cinq observations deux équations de la forme $z = m x + n$; $y = \mu x + \nu$ où x, y, z sont les distances accourcies à la 1re, 3me & 5me observation; les valeurs étant substituées § 24. donneront une équation du 3me degré dont la résolution fera connoître la valeur de x, au moins à une legère erreur près.

Problême.

§ 42. Trouver la valeur de $\zeta = \frac{S\,E}{R'}$.

Solution.

§ 43. Reprenant l'equation

$$\frac{12\,T}{n} = (R + R' + C)^{\frac{3}{2}} - (R + R' - C)^{\frac{3}{2}}$$

ou C eſt la corde $C\,C'$, & la délivrant des radicaux, on aura l'équation ſuivante

$$1)\ \frac{72^2\,T^4}{n^4} - \frac{144\,T^2}{n^2}\left\{(R+R')^2 + 3\,C^2\right\}(R+R')$$
$$+ C^2\left[3\,(R+R')^2 + C^2\right]^2 = 0.$$

On aura de même, poſant le temps entre la ſeconde et troiſième Obſervation $= T'$; & la corde $C'\,C'' = C'$; $C\,C'' = C''$.

$$2)\ \frac{72^2\,T'^4}{n^4} - \frac{144\,T'^2}{n^2}\left\{(R'+R'')^2 + 3\,C'^2\right\}(R'+R'')$$
$$+ C'^2\left[3\,(R'+R'')^2 + C^2\right]^2 = 0.$$

$$3)\ \frac{72^2}{n^4}(T+T')^2 - \frac{144}{n^4}(T'+T)^2\left\{(R+R'')^2 + 3\,C''^2\right\}(R+R'')$$
$$+ C''^2\left[3\,(R+R'') + C''^2\right]^2 = 0.$$

Transformant ces équations de façon qu'il ne s'y trouve que les puiſſances paires de R, R', R'', & ſubſtituant les valeurs de x, on parviendra à trois équations dont l'une ſera du 24[me] & les deux autres du 48[me] degré. Delà il s'enſuit qu'on en pourra, non ſeulement tirer la valeur de ζ, mais auſſi celle de $\frac{v}{n}$, ſi on la ſouhaite encore plus exacte.

Corolaire. I.

§ 44. De cette manière le problême feroit réfolu dans toute fon étendue, mais il s'agit d'un calcul extrêmement embarraffant, que j'aurois pourtant entrepris fi le temps fixé par l'illuftre Académie des Sciences pour la Réfolution du problême en queftion n'étoit pret à expirèr. Au refte, comme nous avons le rapport de x à y & z, on pourra fubftituer ces valeurs de y & z données par x & on parviendra également à trois équations, au moyen des quelles on trouvera la valeur de x.

Corolaire II.

§ 45. Si l'on prend cinq Obfervations, on trouvera au moyen des trois premières, une équation entre x & y qui aura cette forme $y = m\,x + n$ & au moyen des trois dernières, une équation entre y et z, qui fera de cette forme $z = \mu\,x + \nu$ ou je fuppofe y et z les diftances accourcies de la Comète à la 3me et 1me obfervation, fubftituant ces valeurs, on aura trois équations du 24me degré, des quelles on tirera la valeur de x.

Remarque. I.

§ 46. Pour continuer le calcul il faut avoir les valeurs de R, R', R'', C, C', C''. Or il eft facile de voir que

$$R^2 = x^2 \sec \lambda^2 - 2\,a\,x \cos \varepsilon + a^2$$
$$R'^2 = y^2 \sec \lambda'^2 - 2\,b\,y \cos \varepsilon' + b^2$$
$$R''^2 = z^2 \sec \lambda''^2 - 2\,c\,z \cos \varepsilon'' + c^2$$

Pofant de plus les angles

$$B\,S\,D'' = d \qquad S\,B = r$$
$$B'\,S\,D'' = d' \qquad S\,B' = r'$$
$$B''\,S\,D'' = d'' \qquad S\,B'' = r''$$

On aura

$$1)\ r\,r' \cos d = x\,y \cos(\varepsilon' - \varepsilon - \delta) - b\,x \cos(\varepsilon + \delta)$$
$$- a\,y \cos(\varepsilon' - \delta) + a\,b \cos \delta$$

2) $r' r'' \cos d' = y z \cos (\varepsilon'' - \varepsilon' - \delta' + \delta) - c y \cos (\varepsilon' + \delta' - \delta)$
$- b z \cos (\varepsilon'' - \delta' + \delta) + b c \cos (\delta' - \delta)$

3) $r r'' \cos d'' = x z \cos (\varepsilon'' - \varepsilon - \delta') - c x \cos (\varepsilon + \delta')$
$- a z \cos (\varepsilon'' - \delta') + a c \cos \delta'$

Et les cordes

$$(B\ B')^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos d$$
$$(B' B'')^2 = r'^2 + r''^2 - 2 r r'' \cos d'$$
$$(B\ B'')^2 = r^2 + r''^2 - 2 r r'' \cos d''$$

Donc

$$(C\ C')^2 = (B\ B')^2 + (y \operatorname{tang} \lambda' - x \operatorname{tang} \lambda)^2$$
$$(C' C'')^2 = (B' B'')^2 + (z \operatorname{tang} \lambda'' - y \operatorname{tang} \lambda')^2$$
$$(C\ C'')^2 = (B\ B'')^2 + (z \operatorname{tang} \lambda'' - x \operatorname{tang} \lambda)^2$$

Ou bien, puis que $r^2 = x^2 - 2 a x \cos \varepsilon + a^2$
$r'^2 = y^2 - 2 b x \cos \varepsilon' + b^2$
$r''^2 = z^2 - 2 c x \cos \varepsilon'' + c^2$

1) $C^2 = x^2 \operatorname{sec} \lambda^2 + y^2 \operatorname{sec} \lambda'^2 - 2 x y (\operatorname{tang} \lambda \operatorname{tang} \lambda' + \cos (\varepsilon' - \varepsilon - \delta))$
$- 2 x (a \cos \varepsilon - b \cos (\varepsilon + \delta)) - 2 y (b \cos \varepsilon' - a \cos (\varepsilon' - \delta))$
$+ a^2 - 2 a b \cos \delta + b^2$

2) $C'^2 = y^2 \operatorname{sec} \lambda'^2 + z^2 \operatorname{sec} \lambda''^2 - 2 y z (\operatorname{tang} \lambda' \operatorname{tang} \lambda'' + \cos (\varepsilon'' - \varepsilon' - \delta' + \delta))$
$- 2 y (b \cos \varepsilon' - c \cos (\varepsilon' + \delta' - \delta)) - 2 z (c \cos \varepsilon'' - b \cos (\varepsilon'' - \delta' + \delta))$
$+ b^2 - 2 b c \cos (\delta' - \delta) + c^2$

3) $C''^2 = x^2 \operatorname{sec} \lambda^2 + z^2 \operatorname{sec} \lambda''^2 - 2 x z (\operatorname{tang} \lambda \operatorname{tang} \lambda'' + \cos (\varepsilon - \varepsilon'' + \delta'))$
$- 2 x (a \cos \varepsilon - c \cos (\varepsilon + \delta')) - 2 z (c \cos \varepsilon'' - a \cos (\varepsilon'' - \delta'))$
$+ a^2 - 2 a c \cos \delta' + c^2$

Subſtituant enfin à la place de y & z leurs valeurs trouvées ci-deſſus on parviendra à exprimer les cordes par la ſeule inconnue x. Car ſubſtituant à la place de z ſa valeur en x, on aura.

$$y = \frac{\dfrac{\nu}{\mu} b x \left\{ \operatorname{tang} \lambda'' \operatorname{fin} (\varepsilon + \delta) - \operatorname{tang} \lambda \operatorname{fin} (\varepsilon'' - \delta' + \delta) \right\} + \left\{ c \operatorname{fin} (\delta' - \delta) - a \dfrac{\nu}{\mu} \operatorname{fin} \delta \right\} b . \operatorname{tang} \lambda''}{\dfrac{\nu}{\mu} a \left\{ \operatorname{tang} \lambda'' \operatorname{fin} (\varepsilon' - \delta) - \operatorname{tang} \lambda' \operatorname{fin} (\varepsilon'' - \delta') \right\}}$$

$$+ c \, [\text{tang}\, \lambda'' \, \text{fin}\, (\epsilon' + \delta' - \delta) - \text{tang}\, \lambda' \, \text{fin}\, \epsilon'']$$

$$- \frac{v}{u} x \left\{ \text{tang}\, \lambda \, \text{fin}\, (\epsilon'' - \epsilon' - \delta' + \delta) + \text{tang}\, \lambda' \, \text{fin} (\epsilon - \epsilon'' + \delta') - \text{tang}\, \lambda'' \, \text{fin} (\epsilon' - \epsilon - \delta) \right\}$$

Remarque. II.

§ 47. En attendant donc que les équations indiquées § 44. foient réfoluës, on n'a qu'à fubftituer différentes valeurs de x dans les équations,

$$\frac{12\ T}{n} = (R + R' + C)^{\frac{3}{2}} - (R + R' - C)^{\frac{3}{2}}$$

& on trouvera, fans un calcul trop pénible, la vraye valeur de x dans la fuppofition que la valeur de $\frac{v}{\mu}$ foit jufte. Mais comme elle ne l'eft pas à la rigueur; après avoir trouvé une valeur affès approchante de x, on n'a qu'a différentier ces équations, en fuppofant x, y & z variables, & alors on pourra tirer de ces équations les valeurs exactes de ces quantités, & par conféquent tout le refte pour déterminer l'orbite.

Car pour trouver la pofition de la ligne des noeuds, on fe fervira des équations § 21. & 22. & pour trouver le parametre, on prendra une des équations § 2—4.

Le temps du paffage au périhélie fera déterminé par cette équation

$$T = \mp \frac{n}{3\sqrt{2}} . (R + \tfrac{1}{2}p) \sqrt{(R - \tfrac{1}{4}p)}$$

et la longitude du périhélie fe trouve par l'équation $\cos \frac{1}{2} \phi^2 = \frac{\frac{1}{2} p}{R}$ comme il eft connu.

Remarque. III.

§ 48. La folution précédente dépend de l'exactitude de la fraction $\frac{v}{\mu}$ qui approche beaucoup de la raifon du temps entre les obfervations. Donc pour que l'erreur ne foit pas trop grande, il conviendra de choifir les Obfervations, enforte que

les intervalles des temps ne soient pas trop inégales, encore faut-il qu'ils ne soient pas trop éloignés. Au reste le calcul doit être exécuté avec une très grande précision, surtout si les Observations ne sont pas fort éloignées les unes des autres; car dans ce cas la moindre erreur influe beaucoup sur les formules précédentes. Je vais maintemant appliquer les formules données à quelques exemples.

C A L C U L

De la Comète de 1771, d'après les Observations de Mr. Wargentin.

Je choisis les observations suivantes

Temps moyen de Stokholm	Longit. de la Comète	Latitude
1) Avril $30^{j}\ 9^{h}\ 48'\ 42''$.	$C = 78^\circ\ 30'$	$\lambda = 7^\circ\ 5'\ 50''$
2) May $8^{j}\ 10^{h}\ 24'\ 48''$,	$C' = 89^\circ\ 24'\ 54''$	$\lambda' = 7^\circ\ 13'\ 51''$
3) — $16^{j}\ 10^{h}\ 54'\ 45''$	$C'' = 100^\circ\ 20'\ 39''$	$\lambda'' = 7^\circ\ 5'\ 50''$

Long. du Soleil	Distance du Soleil à la terre
1) $\odot = 40^\circ\ 13'\ 41''$	$a = 1{,}0084$
2) $\odot' = 47^\circ\ 59'$ —	$b = 1{,}0103$
3) $\odot'' = 55^\circ\ 42'$ —	$c = 1{,}0121$

Nous avons donc

$\delta = 7^\circ\ 45'\ 19''$ $\qquad \odot - C = \varepsilon = -38^\circ\ 16'\ 19''$

$\delta' - \delta = 7^\circ\ 43'$ $\qquad \odot' - C' = \varepsilon' = -41^\circ\ 25'\ 54''$

$\delta' = 15^\circ\ 28'\ 19''$ $\qquad \odot'' - C'' = \varepsilon'' = -44^\circ\ 38'\ 39''$

$\mu = 8^{j}\ 0^{h}\ 36'\ 6'' = 8{,}0250694$ Log. 0.9044468

$\nu = 8^{j}\ 0^{h}\ 29'\ 57'' = 8{,}0208330$ − 0.9042236

		log. sin
$\varepsilon'' - \varepsilon' - \delta' + \delta$	$= -10^\circ\ 55'\ 45''$	$= 9{,}2778274$
$\varepsilon - \varepsilon'' + \delta'$	$= +21^\circ\ 50'\ 39''$	$= 9{,}5706404$
$\varepsilon' - \varepsilon - \delta$	$= -10^\circ\ 54'\ 54''$	$= 9{,}2772710$
$\varepsilon + \delta$	$= -30^\circ\ 31'$	$= 9{,}7056833$
$\varepsilon + \delta'$	$= -22^\circ\ 48'\ 3''$	$= 9{,}5882982$
$\varepsilon' + \delta' - \delta$	$= -33^\circ\ 42'\ 54''$	$= 9{,}7443606$
$\varepsilon'' - \delta' + \delta$	$= -52^\circ\ 21'\ 39''$	$= 9{,}8986406$
$\varepsilon'' - \delta'$	$= -60^\circ\ 6'\ 58''$	$= 9{,}9380375$
$\varepsilon' - \delta$	$= -49^\circ\ 11'\ 13''$	$= 9{,}8790076$

$\text{Log.} \sin \varepsilon = 9,7920701$ $\qquad$ $\text{Log. tang}\, \lambda = 9,0951948$

$\text{———} \; \varepsilon' = 9,8206783$ $\qquad$ $\text{———} \; \lambda' = 9,1033629$

$\text{———} \; \varepsilon'' = 9,8467738$ $\qquad$ $\text{———} \; \lambda'' = 9,0951948$

$\text{Log.}\; a = 0,0036328$

$\text{———} \; b = 0,0044504$ $\qquad$ $\text{Log.} \dfrac{\nu}{\mu} = 0,9997698$

$\text{———} \; c = 0,0052234$ $\qquad$ $\text{Log.} \dfrac{\mu+\nu}{\mu} = 0,3009127$

Donc $\text{tang}\,\lambda \sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta) = -\,0,02360599$

$\text{tang}\,\lambda' \sin(\varepsilon-\varepsilon''+\delta') = +\,0,04720906$

$\text{tang}\,\lambda'' \sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta) = -\,0,02357576$

Donc $\text{tang}\,\lambda \sin(\varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta) + \text{tang}\,\lambda' \sin(\varepsilon-\varepsilon''+\delta') + \text{tang}\,\lambda'' \sin(\varepsilon'-\varepsilon-\delta)$

$= +\,0,00002731$

$$\frac{a\nu}{\mu} \,\text{Tang}\,\lambda'' \sin(\varepsilon'-\delta) = -\,0,094974063$$

$$\frac{a\nu}{\mu} \,\text{Tang}\,\lambda' \sin(\varepsilon''-\delta') = -\,0,110867150$$

Donc $\dfrac{a\nu}{\mu} \left\{ \text{tang}\,\lambda'' \sin(\varepsilon'-\delta) - \text{tang}\,\lambda' \sin(\varepsilon''-\delta') \right\} = +\,0,015893087.$

$c \,\text{tang}\,\lambda'' \sin(\varepsilon'+\delta'-\delta) = -\,0,069948555$

$c \,\text{tang}\,\lambda' \sin \varepsilon'' = -\,0,090231734$

Donc $c\,[\text{tang}\,\lambda'' \sin(\varepsilon'+\delta'-\delta) - \text{tang}\,\lambda' \sin \varepsilon''] = +\,0,020283179$

$$\frac{\mu+\nu}{\mu}\, b.\ \text{tang}\,\lambda' \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta) = -\,0,20293942.$$

$$\frac{\mu+\nu}{\mu}\, b.\ \text{tang}\,\lambda'' \sin \varepsilon' = -\,0,16643176.$$

$$\frac{\mu+\nu}{\mu}\, b \left\{ \text{tang}\,\lambda' \sin(\varepsilon''-\delta'+\delta) - \text{tang}\,\lambda'' \sin \varepsilon' \right\} = -\,0,03650766$$

Nous avons par conséquent § 36.

$$x = \frac{0{,}036176266 - 0{,}03650766\ \zeta}{0{,}0000273.}$$

Nous trouverons de plus

$$\frac{\nu}{\mu}\left\{\frac{\text{Tang}\ \lambda''\ \text{fin}\ (\varepsilon+\delta) - \text{tang}\ \lambda\ \text{fin}\ (\varepsilon''-\delta'+\delta)}{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\right\} = +\ 0{,}017678900$$

$$\left\{c\ \text{fin}\ (\delta'-\delta) - \frac{a\nu}{\mu}\ \text{fin}\ \delta\right\}\frac{\text{tang}\ \lambda''}{\frac{\mu+\nu}{\mu}} = -\ 0{,}000006668$$

$$\text{Tang}\ \lambda''\ \text{fin}\ \varepsilon' - \text{tang}\ \lambda'\ \text{fin}\ (\varepsilon''-\delta'+\delta) = +\ 0{,}018072264.$$

Donc $y = \frac{0{,}978248\ x - 0{,}0003689}{\zeta.}$

Ou bien, *substituant la valeur de* ζ, $y = \frac{0{,}978248\ x - 0{,}0003689}{0{,}990926 - 0{,}0007478\ x}.$

C'est-à-dire $y = \frac{0{,}987205\ x - 0{,}00037229}{1 - 0{,}0007546\ x}.$

Enfin nous avons $\frac{\nu}{\mu}\left\{\text{Tang}\ \lambda'\ \text{fin}\ (\varepsilon+\delta) - \text{tang}\ \lambda\ \text{fin}\ \varepsilon'\right\} = +\ 0{,}017956425.$

$$\left\{c\ \text{fin}\ (\delta'-\delta) - \frac{a\nu}{\mu}\ \text{fin}\ \delta\right\}\text{tang}\ \lambda' = -\ 0{,}000013587.$$

Donc $z = 0{,}993571\ x + 0{,}0007512.$

Nous avons de plus $\text{tang}\ \lambda\ \text{tang}\ \lambda' = 0{,}01579700.$

$\text{Tang}\ \lambda\ \text{tang}\ \lambda'' = 0{,}01550207.$ $\text{Tang}\ \lambda'\ \text{tang}\ \lambda'' = 0{,}01579700.$

$\text{Sec}\ \lambda^2 = 1{,}01550161.$ $\text{Sec}\ \lambda'^2 = 1{,}01610089.$ $\text{Sec}\ \lambda''^2 = 1{,}01550161.$

$\text{Cos}\ \varepsilon''-\varepsilon'-\delta'+\delta = 0{,}9818623.$ $\text{Cos}\ \varepsilon'-\varepsilon-\delta = 0{,}9819091.$

$\text{Cos}\ \varepsilon-\varepsilon''+\delta' = 0{,}9281975.$ $\text{Cos}\ \varepsilon = 0{,}7850768.$

$\text{Cos}\ \varepsilon+\delta = 0{,}8614815.$ $\text{Cos}\ \varepsilon' = 0{,}7497455.$

$\cos \varepsilon'-\delta = 0{,}6535967$. $\cos \delta = 0{,}9908528$.
$\cos (\varepsilon'+\delta'-\delta) = 0{,}8318099$. $\cos \varepsilon'' = 0{,}7115145$.
$\cos (\varepsilon''-\delta'+\delta) = 4{,}6107595$. $\cos (\delta'-\delta) = 0{,}9909442$.
$\cos (\varepsilon''-\delta') = 0{,}4982355$. $\cos \delta' = 0{,}9637599$.

On trouvera donc § 46. $C''^2 = x^2.\ 1{,}01550161 + z^2\ 1{,}01550161 - x\ z.\ 1{,}88739914 + x.\ 0{,}28268248 - z.\ 0{,}43540629 + 0{,}07398755$ ou bien ſubſtituant la valeur de z.

$C''^2 = 0{,}14270482\ x^2 - 0{,}150090704\ x + 0{,}473988123$.

Et $R^2 = 1{,}01550161\ x^2 - 1{,}58334288\ x + 1{,}01687056$.

$R''^2 = 1{,}01550161\ z^2 - 1{,}440247650\ z + 1{,}02434641$.

Ou bien $R''^2 = 1{,}0024862609\ x^2 - 1{,}4324961564\ x + 1{,}0254288970$.

Enfin $R'^2 = 1{,}01610089\ y^2 - 1{,}51493575\ y + 1{,}02073609$ ou bien ſubſtituant la valeur de y.

$$R'^2 = \frac{0{,}9913203\ x^2 - 1{,}49783992\ x + 1{,}02127023}{(1 - 0{,}0007546\ x)^2}$$

$$\begin{aligned} C^2 = {} & 1{,}01550161\ x^2 - 1{,}58334288\ x + 1{,}01687056 \\ & + 1{,}01610089\ y^2 - 1{,}51493575\ y + 1{,}02073609 \\ & - (1{,}9954122\ x - 1{,}3181738)\ y + 1{,}7407094\ x - 2{,}01893478. \end{aligned}$$

Ou bien ſubſtituant la valeur de y.

$$C^2 = \frac{0{,}991392\ x^2 - 1{,}4978399\ x + 1{,}02127023}{(1 - 0{,}0007546\ x)^2}$$
$$- \frac{[1{,}9952122\ x - 1{,}3187738]\ [0{,}987205\ x - 0{,}00037229]}{1 - 0{,}0007546\ x}$$
$$+ 1{,}0155\ x^2 + 0{,}1572806\ x - 1{,}00206422.$$

Nous n'avons donc qu'a donner à x différentes valeurs & calculer les valeurs de

$$\frac{12}{n} T = \sqrt{(R+R''+C'')^3} - \sqrt{(R+R''-C'')^3}$$

Et on parviendra aiſément à découvrir la valeur de x qui ſera fort approchante, qu'on corrigera par la différentiation. Suppoſons $x = 0{,}4$ on aura $R = 0{,}7388$ $R'' = 0{,}7828$ $C'' = 0{,}1917$ & $12 \frac{T}{n} - \sqrt{(R+R''+C'')^3} - \sqrt{(R+R''-C'')^3} = + 0{,}9731$.

Poſant $x = 0{,}8$ on aura $12 \frac{T}{n} - \sqrt{(R+R''+C'')^3} - \sqrt{(R+R''-C'')^3} = + 0{,}9054$.

Posant $x = 1{,}12$ on aura $\frac{12\,T}{n} - V$ &c. $= + 0{,}4531.$

Posant $x = 1{,}6$ on aura $\frac{12\,T}{n} - V$ &c. $= - 0{,}3621.$

La valeur de x est donc renfermée entre 1,4 & 1,5, prenant donc le milieu, c'est-à-dire, posant $x = 1{,}4$ on aura $\frac{12}{n}\,T\,V$ &c. $= + 0{,}1036$

Et posant $x = 1{,}55$ on aura $\frac{12}{n}\,T - V$ &c. $= - 0{,}1085$

Donc nous supposerons $x = 1{,}45 + d\,x$ d'après cette supposition on aura $y = 1{,}4326 + d\,y$; $z = 1{,}4406 + d\,z$

Différentions & puisque

$$C^2 = 1{,}01550161\,x^2 - 1{,}9954122\,x\,y + 1{,}01610089\,y^2 + 0{,}15706652\,x - 0{,}19676198\,y + 0{,}01867187.$$

$$C'^2 = 1{,}01610089\,y^2 - 1{,}9953186\,y\,z + 1{,}01550161\,z^2 + 0{,}16901384\,y - 0{,}20837586\,z + 0{,}01963519.$$

$$C''^2 = 1{,}01550161\,z^2 - 1{,}88739914\,x\,z + 1{,}01550161\,z^2 + 0{,}28268248\,x - 0{,}43540629\,z + 9{,}\,07398755.$$

On aura $C\ d\ C = 0{,}12184\,d\,x - 0{,}08937\,d\,y$

$C'\ d\ C' = 0{,}10295\,d\,y - 0{,}10050\,d\,z$

$C''\,d\,C'' = 0{,}30433\,d\,x - 0{,}12324\,d\,z$

Ou bien, calculant la valeur de C, C', C'', & substituant $d\,C = 6{,}0586\,d\,x - 4{,}4638\,d\,y$; $d\,C' = 5{,}1779\,d\,y - 5{,}2390\,d\,z$; $d\,C'' = 7{,}7656\,d\,x = 3{,}1440\,d\,z$

Et de même $d\,R = 0{,}7357\,d\,x$; $d\,R' = 0{,}7216\,d\,y$; $d\,R'' = 0{,}7228\,d\,z$.

On trouvera donc

$$\begin{aligned}
d\,R + d\,R' + d\,C &= 6{,}7943\,d\,x - 3{,}7422\,d\,y.\\
d\,R + d\,R' - d\,C &= -\ 5{,}3229\,d\,x + 5{,}1854\,d\,y.\\
d\,R' + d\,R'' + d\,C' &= 5{,}8995\,d\,y - 4{,}5362\,d\,z.\\
d\,R' + d\,R'' - d\,C' &= -\ 4{,}4563\,d\,y + 5{,}9818\,d\,z.\\
d\,R + d\,R'' + d\,C'' &= 8{,}4913\,d\,x - 2{,}4212\,d\,z.\\
d\,R + d\,R'' - d\,C'' &= -\ 7{,}0199\,d\,x + 3{,}8668\,d\,z.
\end{aligned}$$

Et puisqu'il faut que 1) $\frac{12}{n}\,T - V\,(R + R' + C)^3 + V\,(R + R' + C')^3 -$

$$\tfrac{3}{2}\,(d\,R + d\,R' + d\,C)\,V\,(R + R' + C)^3 + \tfrac{3}{2}\,(d\,R + d\,R' - d\,C)\,V\,(R + R' - C)^3 = o.$$

$$2)\ \frac{12}{n} T' - \sqrt{(R'+R''+C')^3} + \sqrt{(R'+R''-C')^3} -$$
$$\tfrac{3}{2}(dR'+dR''+dC')\sqrt{(R'+R''+C')} -$$
$$\tfrac{3}{2}(dR'+dR''-dC')\sqrt{(R'+R''+C')} = o.$$

$$3)\ \frac{12}{n}(T+T') - \sqrt{(R+R''+C'')^3} + \sqrt{(R+R''-C'')^3}$$
$$-\tfrac{3}{2}(dR+dR''+dC'')\sqrt{(R+R''+C'')}$$
$$+\tfrac{3}{2}(dR+dR''-dC'')\sqrt{(R+R''+C'')^3} = o.$$

Et puisque $\frac{12}{n} T = 0{,}8283$; $\frac{12}{n} T' = 0{,}8278$; $\frac{12}{n}(T+T') = 1{,}6562$.

On aura les équations ſuivantes

$$-\ 0{,}0013 - 25{,}1169\, dx + 18{,}2283\, dy = o.$$
$$+\ 0{,}0100 - 22{,}0430\, dy + 22{,}0891\, dz = o.$$
$$+\ 0{,}0115 - 32{,}5417\, dx + 12{,}7323\, dz = o.$$

Dont la réſolution donne $dx = 0{,}000326$, $dz = 0{,}0000663$, $dy = 0{,}0005264$.

Donc $x = 1{,}45032$, $y = 1{,}43312$, $z = 1{,}44066$

Et $R = 0{,}925539$, $R'' = 1{,}027647$, $C'' = 0{,}39421$

Ces valeurs étant ſubſtituées dans le § 4. on trouvera le parametre $p = 3{,}6066340079$ donc la diſtance périhélie $\frac{1}{4} p = 0{,}901658$. Si l'on calculè les formules du § 22. on trouvera la poſition de la ligne des noeuds par l'angle ζ, qui ſera 5° 51′ 22′ et l'inclinaiſon qui ſera 11° 16′ 32″. Le calcul eſt trop facile pour que je m'y arrete plus longtemps.

Remarque. IV.

§ 49. Dans toutes ces formules j'ai oté la longitude de la Comète de celle du ſoleil, et j'ai ſuppoſé la latitude boréale; par conſéquent ſi la longitude de la Comète eſt plus grande que celle du ſoleil, l'élongation ou l'angle ε ſera *négative* comme celà arrive dans l'exemple précédent; et ſi la latitude eſt tantôt boréale, tantôt auſtrale, il faut prendre la latitude *auſtrale négative*; ſi l'on ſuppoſe la latitude boréale *poſitive* et réciproquement. Au reſte, je me reſerve, de préſenter à l'illuſtre Académie des Sciences d'autres exemples, pour faire voir l'uſage de cette méthode.

DISSERTATION

SUR LE

PROBLÊME

Où il s'agit de déterminer l'orbite Parabolique d'une Comète

Présentée à l'Académie Royale des Sciences de Prusse en 1773.

PAR

M. HENNERT,

Professeur en Philosophie & Mathematiques de l'Université d'Utrecht; Membre des Sociétés des sciences de Harlem, de Flessingue, de Rotterdam & d'Utrecht.

Dans une Ellipse immense achevez votre cours;
Remontez, descendez près de l'astre des jours.

DISSERTATION

SUR LE

PROBLÊME

Où il s'agit de déterminer l'orbite Parabolique d'une Comète.

Je ne saurois réflechir sur la théorie des Comètes sans m'étonner de l'audace qui a porté les Géometres, d'ailleurs si scrupuleux dans leurs recherches, à tracer l'orbite des astres dont les mouvemens & les situations fournissent un petit nombre d'observations, même peu interessantes. En effet de quels avantages ne jouit pas l'astronome, qui observe & calcule les planètes, au dessus de celui qui fait des recherches sur les comètes? Le retour, ou le temps périodique des planètes, élément important de leur théorie, s'observe souvent & facilement. Les oppositions & les conjonctions des planètes supérieures, les conjonctions & les digressions des planètes inférieures, leurs passages par le méridien, leurs proximités des noeuds & des limites, offrent aux astronomes les positions les plus intéressantes et les moins sujettes à produire des erreurs dans l'observation et dans le calcul. Il s'en faut de beaucoup qu'on tire le même parti des courtes apparitions des Comètes. La révolution observée d'une seule Comète, qui paroit être *des plus* promtes, surpasse presque la vie d'un homme. Toutes ses autres ne redescendent auprès de nous qu'au boût de plusieurs générations. Tout au plus et rarement encore, on ne peut

obſerver qu'une oppoſition. Souvent les Comètes ſe levent peu avant l'aurore, ſouvent elles ſe couchent quelques heures après le ſoleil. Ainſi elles nous dérobent leurs paſſages par le méridien. Souvent elles font leur cours bien au delà du Zodiaque, dans des régions peu viſitées par les Aſtronomes. Souvent elles ne ſe montrent même à l'oeil armé, que pendant l'eſpace de quinze jours ou de trois ſemaines; à peine pourra-t-on recueillir cinq ou ſix bonnes obſervations. Cependant on a bravé toutes ces difficultés, l'on a calculé et l'on a réuſſi quelque fois aſſès bien. Je dis *aſſès bien*, parceque les Géometres ne disconviendront pas, que les méthodes concernant le mouvement des Comètes, ne font que des approximations, et elles le feront probablement encore long-temps. Pourquoi donc s'obſtiner avec quelques *Mathématiciens* à vouloir concilier les calculs et les obſervations des lieux des Comètes *à deux ou trois minutes près? Peut-on répondre* d'une pareille exactitude pour les planètes, qui mettent pourtant les *Aſtronomes* à portée de refaire tous les ans *pluſieurs* bonnes obſervations et de retoucher les calculs?

§. 2. Heureuſement pour l'Aſtronomie, les diſtances Périhelies des Comètes font très petites par rapport aux grands axes. Voilà la ſeule condition favorable à la théorie des Comètes, ſans la quelle *Newton* n'auroit pu imaginer que les mouvemens des Comètes répondent aſſès exactement à la Parabole. En effet, ſi les Comètes décrivoient des Ellipſes moins allongées, il ſeroit impoſſible de déterminer leurs orbites; car il faut connoitre deux choſes, ſavoir la diſtance périhelie et le grand axe pour tracer l'Ellipſe. Mais il ne faut connoître que la diſtance périhelie pour décrire la Parabole. Or de deux diſtances héliocentriques, l'angle compris et le temps écoulé étant donnés, l'on ne peut point définir l'*Ellipſe*, quoique ce peu de données ſuffiſe pour déterminer la Parabole: D'ailleurs il eſt incomparablement plus facile de calculer les orbites Paraboliques que les *Elliptiques*. Parceque le Syſtême *Newtonien* eſt généralement reçu; nous conſidérerons d'abord les orbites des Comètes comme Paraboliques, pour nous conformer principalement au Programme de *l'illuſtre Académie*. Comme les Comètes parcourent véritablement des Ellipſes, en ſorte qu'on ne ſubſtitue la Parabole à l'Ellipſe que pour abréger les premiers eſſais qu'on fait pour ébaucher l'orbite d'une Comète; il s'agira d'abord d'examiner avec plus de préciſion les conditions et les limites de l'hypothêſe parabolique pour apprécier les erreurs et les écarts plus ou moins conſidérables, qui en doivent réſulter ſelon les différentes circonſtances.

Soit le grand axe $AB = 2a$, (*Fig.* 4.) le paramètre $= p$, $AP = x$, $PM = y$, il y aura, $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$. Si donc le second terme étoit très petit, il y auroit, $y^2 = px$, & l'Ellipse se changeroit en Parabole, en sorte que les deux courbes auroient le même paramètre & appartiendroient au même foïer. Or le second terme peut devenir extrêmement petit.

1) Si le paramètre, & partant la distance périhelie sont peu considérables à l'égard du grand axe.

2) Si l'axe est très grand par rapport à l'abscisse. D'où il s'ensuit, que l'Ellipse approchera plus ou moins de la Parabole aux environs du Périhelie, ou les abscisses sont courtes, sur tout si le *paramètre n'est pas trop* considérable pas rapport à l'axe.

3) *Il s'ensuit encore qu'on peut regarder une ellipse* très allongée comme une Parabole *décrite sur le même axe, autour du même foïer, avec le même paramètre.*

4) La distance périhélie dans l'Ellipse ou AS est $= a - a\sqrt{\left\{1 - \frac{p}{2a}\right\}}$

$$= \frac{p}{4} + \frac{p^2}{32a} + \frac{p^3}{128a^2} + \&c.$$

Dans la Parabole, la distance perihelie est $CS = \frac{p}{4}$, donc la distance périhelie Elliptique est plus grande que la Parabolique, ou $AS > CS$, lorsque l'Ellipse & la Parabole ont le même paramètre, comme nous l'avons tantôt déterminé, & que nous le supposerons dans la suite.

5) La figure, 1re représente donc l'Ellipse & la Parabole conformement aux conditions des *Nro.* 3. & 4. On voit d'abord que ces deux courbes doivent se couper au point N, ou à l'anomalie de 90. degrés.

6) Les anomalies ASM étant les mêmes; les distances parabolique ST sont plus grandes que les Elliptiques, depuis les anomalies de 90 à 180 degrés: Le contraire sera vrai pour les anomalies depuis 0 jusqu'à 90. degrés, il y aura $RS < SQ$.

7) L'on sait que la distance parabolique ST ou $y = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\phi}$ posant $\phi =$

à l'anomalie *AST*. La distance Elliptique *AM* ou $Z = \frac{1}{2}p : \left\{ 1 - \cos\phi \sqrt{\left(1 - \frac{p}{2a}\right)} \right\}$ $= \frac{1}{2}p : \left\{ 1 - \cos\phi + \frac{p\cos\phi}{4a} + \&c. \right\}$ Donc $y : y - Z = 1 - \cos\phi + \frac{p\cos\phi}{4a} : \frac{p\cos\phi}{4a}$, & $y - Z = \frac{yp\cos\phi}{4a} : \left\{ 1 - \cos\phi + \frac{p\cos\phi}{4a} \right\}$. Ou, omettant $\frac{p\cos\phi}{4a}$, ou aura $y - Z = \frac{y\cos\phi}{2a} \times \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\phi} = \frac{y^2\cos\phi}{2a}$. La différence de ces distances est additive à la distance parabolique depuis o jusqu'à 90°, & soustractive depuis 90 jusqu'à 180 degrés *pour en déduire les* distances Paraboliques. On voit encore que cette différence est très petite aux environs de l'anomalie de 90 degrés. Mais elle augmente à mesure que les anomalies excédent 90 degrés, car alors les distances *y* augmentent de plus en plus par rapport au grand axe.

8) Considérons les différences des anomalies, posant les distances égales dans l'Ellipse & la Parabole. Soit l'anomalie Parabolique $AST = \pi$ & l'Elliptique $ASO = \phi$, à cause de $ST = SO$, il y aura $1 - \cos\pi = 1 - \cos\phi \sqrt{\left\{1 - \frac{p}{2a}\right\}}$, ou $\frac{p\cos\phi}{4a} = \cos\phi - \cos\pi = 2\,\text{fin}\,\frac{\pi+\phi}{2}\,\text{fin}\,\frac{\phi-\pi}{2}$. Mais à cause de la petite différence entre les angles π & ϕ, on pourra admettre $\text{fin}\,\frac{\phi-\pi}{2} = \frac{\phi-\pi}{2}$, & $\text{fin}\,\frac{\pi+\phi}{2} = \text{fin}\,\phi$, donc $\phi - \pi = \frac{p}{4a\,\text{tang.}\,\phi}$. La différence des anomalies est additive aux anomalies paraboliques depuis o jusqu'à 90 degrés, & soustractive depuis 90 jusqu'à 180 degrés, pour déduire des anomalies paraboliques les anomalies elliptiques, les distances étant d'ailleurs égales. La différence de ces anomalies sera la plus petite aux environs de 90 degrés. Mais elle pourra devenir considérable aux environs du périhélie & de l'aphélie.

9) Il paroit de tout ce que nous venons de dire, que l'hypothêse parabolique s'écarte le moins de la vérité, lors qu'on choisit les observations près de l'anomalie de 90 degrés. Mais elle s'éloignera de plus en plus de la vérité, à mesure que les observations, qu'on soumet au calcul, répondent à des anomalies plus grandes que

90 degrés. Au reste nous ferons usage des formules que nous venons d'établir, lorsqu'il s'agira de réduire l'orbite Parabolique à l'Elliptique.

§. 3. Parceque la Parabole est déterminée moyennant deux ou trois distances vraïes héliocentriques, les angles compris & le temps écoulé d'une distance a l'autre, il faudra d'abord commencer par examiner les moyens, employés par le Géometres pour déduire des lieux géocentriques d'une Comète, les distances à la terre ou au soleil. (*Fig.* 5.) Dans le triangle *C S T*, ou *C*, *S*, *T* indiquent la Comète, le soleil & la terre, on ne peut connoître par les observations que la distance *S T* & l'angle *T* ou l'élongation de la comète à la terre. Il manque donc encore une donnée pour déterminer la distance *S C*. Or les méthodes connues jusqu'ici sont toutes fondées sur une supposition, qui dans la plus part des cas détourne les calculateurs loin de leur but. *L'on suppose le* mouvement de la Comète uniforme *& rectiligne* pendant l'espace de trois ou quatre jours. Il doit résulter principalement deux *inconvéniens inévitables de cette hypothèse*; *car pour la soutenir*, *on sera obligé de prendre* un temps très court de trois à quatre jours. Mais alors ce mouvement rectiligne supposé conviendra à une infinité de Paraboles, dont il ne sera que la tangente. Si au contraire on vouloit employer un plus long intervalle de jours, *l'on s'écarteroit trop de la supposition du mouvement uniforme*, qui est *très varié lors qu'il n'est pas loin du perihélie*, *où cependant l'hypothèse Parabolique atteint la plus grande exactitude*, *comme nous l'avons fait voir*. *Newton* a donné *le premier* une méthode pour trouver les distances géocentriques de la Comète, dont les autres méthodes ne sont plus on moins que des copies. Dans la solution de la fameuse quatrieme proposition du troisieme livre des *Principes*, *Newton* suppose qu'une des trois distances géocentriques est donnée. Moyennant cette distance connue, *Newton* cherche deux autres distances pour des temps donnés afin de déterminer le mouvement Parabolique de la Comète. Mais *Newton* ne s'explique pas sur la manière de déduire des lieux géocentriques une distance de la Comète à la terre. Il paroit qu'il s'en est voulu rapporter au Corollaire du 27^m Lemme du premier livre; où il est parlé de faire passer une ligne droite qui coupe quatre lignes données de position, en raison donnée. Aussi les Célèbres Commentateurs des *Principes* de *Newton* font précéder à la 41^me proposition du 3^me *livre* une solution très détaillée du Lemme mentionné. *Grégori* dans les *Elementa Astronomiae* a donné la solution du même Lemme précédemment à la proposition de *Newton*. Voyez les proposition 11. & 12. du cinquieme livre. Mais que *Newton* ait eu en

vuë le Lemme mentionné, paroit asses probable par le 56^me^ Problême de *l'Arithmetique Universelle*, „ Cometae motu uniformi, rectilineo per coelum trajicientis lo„ cis quatuor observatis, distantiam a terra determinare." Le Père *Boscowich* a bien démontré dans une dissertation, inférée parmi les *Additamenta* au Commentaire du Célèbre M. de *Castillon* sur l'Arithmétique Universelle, que le problème en question devient souvent indeterminé. Ce savant Père allégue entr' autres l'autorité de *Zanotti*, qui ayant employé la solution de *Newton*, a été tellement dérouté par le calcul, qu'il a trouvé une distance infinie. J'y pourrois ajouter mon expérience, si elle pouvoit être de quelque poids. L'on se peut facilement convaincre des écarts dans lesquels jette cette espece de calcul, pour peu qu'on examine la solution trigonométrique que M. *Cassini* en a donnée dans les *Memoires* de *l'Académie des Sciences de Paris* de l'année 1729. On n'a qu'à jetter les yeux sur les deux figures qui appartiennent au mémoire cité. On verra dabord que les intersections des lignes *B O* & *A N*, qui aboutissent, aux deux lieux intermediaires de la Comète, peuvent tomber en deçà ou au delà des points *A* & *N*, ce qui rend incertaine la position des points *A* & *N*. *Cassini* n'a construit les figures & par conséquent sa démonstration que pour le cas où l'orbite rectiligne tombe en dehors de l'orbite de la terre. Mais si elle se trouvoit renfermée entre l'orbite terrestre, la figure & le calcul changeroient entièrement de face. Or comment savoir de quel côté placer la portion rectiligne de l'orbite de la Comète? En un mot, ces figures ne sont pas tracées d'après la vérité. Cependant la démonstration de M. *Cassini* est fondée là dessus. On ne peut placer les lieux de la terre si voisins les uns des autres, ainsi que dans ces figures. Mais si les quatre lieux de la terre sont proches les uns des autres, les points d'intersection *E* & *C* tombent beaucoup au delà des endroits où la figure les montre, comme je l'ai éprouvé m'étant embrouillé dans les calculs à perte de vue.

§. 4. M. *Bouguer* qui a enrichi les Mathématiques physiques d'importantes découvertes, a publié dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* de l'année 1733, une méthode de trouver les distances de la Comète à la terre moyennant trois lieux géocentriques. J'avoue que cette méthode est une des plus simples & des plus élégantes. Le Célèbre *Bouguer* renferme la distance racourcie de la Comète dans une seule formule qui n'est pas trop compliquée pour ces sortes de recherches. Il est vrai que sa méthode est encore fondée sur la supposition du mouvement uniforme & rectiligne dans l'espace de peu de jours. Mais malgré ce défaut

faut commun à toutes ces méthodes connues jusqu'ici, elle l'emporteroit sur toutes les autres; si l'on savoit du moins à vue d'oeil déterminer la position de l'orbite rectiligne de la Comète, réduite à l'Ecliptique. M. *Bougeur* la place dans la figure, entre la terre et le concours des deux distances géocentriques racourcies. Posant $x =$ la distance de la Comète au concours des deux distances géocentriques, et $b =$ à la distance de ce point de concours à la terre, la distance de la Comète à la terre est $= b - x$, or si le lieu de la Comète tomboit au delà du point de concours mentionné, la distance de la Comète à la terre seroit $= b + x$. Donc les signes de l'équation de x changeroient, donc la valeur de l'inconnue sera ambigue. Or les conditions du problême ne déterminent pas préalablement la position de l'orbite réduite à l'Ecliptique, ainsi que le problême sera toujours indéterminé. Je me dispense au reste de juger de l'application de ce problême pour déterminer l'orbite Elliptique: cette application me paroit trop précipitée et trop hardie.

§. 5. L'incomparable M. *Euler* a travaillé depuis longtemps et à différentes reprises sur les Cométes. Dans le 7me Tome des *Miscellanea Berolinensia*, dans la *Theoria Cometarum*, et dans ses dernières recherches sur la Comète de 1769, ce grand homme a publié des méthodes analytiques dont la beauté a de quoi en imposer au lecteur, et elle m'en imposeroit plus qu'à tout autre, si je ne me sentois forcé d'avouer, qu'elles sont trop longues pour des approximations. Car il faut plusieurs fois répéter les calculs dans ces sortes de cas, c'est pour quoi il est convenable d'abrèger les approximations autant qu'il est possible sans s'écarter trop du vray. M. *Euler* suppose dans toutes ses recherches qu'une des trois distances est donnée. Il n'indique aucun moyen de la trouver même à peu près. Moyennant une distance donnée, qu'il prend à volonté, il cherche deux autres distances pour résoudre entièrement le problème en quèstion. M. *Euler* paroit même douter si l'on peut déduire des lieux géocentriques une distance de la Comète a la terre. Il dit page 22. de ses recherches sur la Comète de 1769, „ Puis qu'il seroit *presque impossible* de „ résoudre algébraiquement ce Problême, en cherchant la véritable grandeur de „ la distance; le plus sur moyen est de supposer successivement différente valeurs „ &c." On sait bien que les calculs les plus épineux n'ont rien de rébutant pour M. *Euler*; il faut donc qu'il ait entrevu d'autres difficultés que celles du calcul. Il est certain que les Méthodes de *Newton* et de *Bouguer* l'emporteroient sur celle d'*Euler*, si elles n'étoient pas indéterminées, car du reste elles fournissent les distances elles mêmes sans en prendre aucune à volonté.

§. 6. Je paſſe ſous ſilence les méthodes indirectes, parmi les quelles celle de M. *Halley*, perfectionnée & rendue plus praticable par Meſ. de la *Caille* et de la *Lande*, tient le premier rang; parceque l'illuſtre *Académie* a propoſé la ſolution analytique du Problême. Je paſſerai donc plutôt à ébaucher la méthode que j'ai l'honneur de ſoumettre au jugement des *Illuſtres Académiciens*. J'avertis d'abord que mes recherches commencent en tatonnant, parceque, ſelon que j'ai remarqué dès le commencement, il eſt impoſſible qu'on trouve du premier coup, & exactement, les élémens de l'orbite de la Comète. Ne fait-on pas la même choſe même pour les Planètes? Mais je ne tatonne pas en aveugle, battant l'air des mains. Je tatonne pour ainſi dire le bâton à la main. Mes eſſais ſeront toujours dirigés ſur des formumules algébraiques.

1) Parceque les Géometres ont été jusqu'ici embaraſſés de déterminer du moins à peu-près une diſtance géocentrique, je propoſe d'abord des moyens pour trouver le lieu de la Comète où les diſtances du ſoleil à la terre & à la Comète ſont presque égales. Ou s'il n'y a point d'obſervations déduites aux environs de ce lieu, je donne une autre méthode pour trouver à-peu-près une diſtance géocentrique.

2) Moyennant une diſtance de la Comète à la terre ou au ſoleil, je cherche une autre diſtance par le ſecours d'une formule peu compliquée pour un intervalle de huit ou de douze jours.

3) Avec les deux diſtances héliocentriques & l'angle compris, je recherche le temps dans le quel le ſecteur Parabolique a été décrit.

4) Comme le temps calculé différera ſans doute, du temps obſervé, je recommence le calcul des Nro: 2 & 3, augmentant ou diminant la première diſtance ſelon les circonſtances.

5) Je choiſis la plus exacte des deux Hypothêſes moyennant la quelle je détermine le lieu du noeud & l'inclinaiſon.

6) J'établis en ſuite trois Hypothêſes, l'une où l'inclinaiſon & le lieu du noeud ſont tels qu'ils ont réſulté du calcul du Nro précédent. Dans la ſeconde je change la valeur du lieu du noeud trouvé ſelon certaines regles, conſervant l'inclinaiſon. Dans la troiſième Hypothêſe je fais varier l'inclinaiſon, conſervant le lieu du noeud. Selon ces trois Hypothéſes je calcule le lieu du Périhélie, le parametre & le temps du Périhélie pour trois obſervations données. Des différens réſultats du noeud, de l'inclinaiſon, je tire les corrections qu'il faut appliquer aux cinq élémens de l'orbite Parabolique.

7) Avec les cinq élémens corrigés, je calcule un ou deux lieux géocentriques pour des temps donnés.

8) Si les erreurs des lieux calculés ne montent qu'à 4 ou 5 minutes, je ne reprends plus les opérations du Nro 6. mais j'y mets la derniere main, réduisant l'orbite Parabolique, à l'Ellipse. Selon les huit parties de ma méthode, j'ai partagé la dissertation en huit articles.

PREMIER ARTICLE.

De la Détermination d'une distance de la Comète à la terre ou au soleil.

§. 7. J'ai employé deux moyens pour déterminer par approximation une première distance de la Comète. L'un est fondé sur un beau théorème que le célèbre Académicien M. *Lambert* a démontré dans le second tome des *nouveaux mémoires de l'Académie Royale de Berlin.* page 353. M. *Lambert* a prouvé que les distances du soleil à la Comète & à la terre sont presque & même égales; lorsque le mouvement apparent de la Comète, quand elle paroit décrire un arc de grand cercle de la sphère, ne différe qu'insensiblement ou point du tout du vrai mouvement. Comme ce théorème est tout nouveau, je me hâte avec plaisir d'en faire voir l'application & les moyens d'en faire usage pour découvrir cette distance de la Comète au soleil. La méthode que fournit ce théorème, seroit applicable à toutes les Comètes, si leurs *distances périhélies* n'étoient pas quelque fois plus grandes que la distance du soleil à la terre, ou qu'elles n'en différassent pas beaucoup. Parmi les 69 Comètes qu'on a observées, il y en a douze dont les distances périhélies sont trop grandes pour être comprises sous le théorème mentionné, comme celles de 1231, 1585, 1652, 1684, 1707, 1718, 1729, 1743, 1747, 1748, 1760, 1762. De plus, si l'on n'a pu faire des observations assez proches des environs du lieu de la Comète en question, il faudra renoncer a l'usage du théorème. Pour ne laisser rien à désirer sur ma méthode, je donnerai dans la suite un autre moyen assez simple pour trouver à peu-près une première distance de la Comète. Parceque la

Comète de 1769, que j'ai choisie pour faire l'application de ma méthode, se trouve dans les circonstances les plus favorables pour nous faire découvrir quand elle a été à la même distance du soleil que la terre, je commencerai par indiquer les moyens de faire usage du théorème de M. *Lambert*. Ce théorème se peut assez rigoureusement démontrer de la manière suivante.

(*Fig.* 6.) Si deux planètes en *D* & *F* décrivent des secteurs *D S T*, *FSC* dans des temps égaux & extrêmement courts autour du soleil, les forces d'attraction seront en raison des espaces *t T*, *c C*. La terre en *D* & la Comète en *F* auroient parcouru les tangentes *D t*, *F c*, dans le même temps qu'elles ont décrit les arcs de leurs orbites *D T*, *F C*, si l'attraction ne les avoit pas détournées du mouvement rectiligne par les *espaces*, *t T*, *c C*, la terre & la Comète paroitroient décrire l'arc d'un grand cercle de sphère. Si leurs mouvemens etoient rectilignes, alors leurs mouvemens apparens, donc aussi leurs lieux apparens & rapportés aux grands cercles de la sphère céleste, coïncideroient avec les vrais mouvemens, donc aussi avec les vrais lieux dans l'orbite. Or celà peut encore arriver quand la Comète & la terre sont à égales distances du soleil. Car les forces d'attraction en *T* & *S*, sont comme $\frac{S}{TS^2} : \frac{S}{SC^2} = tT : cC$. Or *T S* étant $= SC$, il y aura $Tt = Cc$, les lignes *T C*, *t c* seront paralleles, & les angles *c t s*, *C T S* seront égaux. Or les lignes droites *D t*, *F c* représentent les mouvemens & les lieux apparens sur l'arc de la sphère; donc les angles *S t c*, indiquent les élongations du soleil sur la sphère. Mais les angles *S T C* représentent les vraies élongations du soleil & de la Comète dans l'orbite, d'où il paroit que l'élongation vraie géocentrique ne différe pas de l'apparente lorque les distances *S T* & *S C* sont égales.

(*Fig.* 9.) Que l'on fasse passer par deux lieux de la Comète en *A* & *B* l'arc du grand cercle *M A B E*, qui coupe en *E* l'Ecliptique *V S*. L'arc *A B* représentera le mouvement apparent de la Comète, sur la sphère dans l'intervalle des lieux *A* & B. L'arc *A B* représenteroit le vrai mouvement de la Comète, s'il étoit rectiligne & uniforme. Supposons la terre en *T* et le soleil en *S*, le vrai lieu de la Comète en *C*, l'arc du grand cercle *C S*, ou l'angle *C T S* de la fig. 6. indique l'élongation de la Comète dans son orbite. Or la longitude géocentrique de la Comète étant *V e*, en résolvant le triangle spherique *E e f*, on trouvera le lieu apparent de la Comète en *f*, cet arc *f S* ou l'angle *f T S* ou bien l'angle *S t c* de la

fig. 6. détermine l'élongation de la Comète rapportée à la ſphère apparente. Mais, ſi la Comète étoit en *c* ſur l'arc du grand-cercle les arcs *C S* et *c S* ou les angles *S T c*, et *S t c* feroient égaux.

§. 8. (*Fig.* 8.) Si la diſtance de la Comète au ſoleil *S C* eſt plus grande que celle du ſoleil à la terre *S T*, il y aura *T t* > *C c*, à cauſe de *T t* : *C c* = SC^2 : ST^2. Alors les lignes *t c*, *T C* concourent au point *R*, et l'angle *S T C* deviendra plus grand que *S t c*. D'ou il s'enſuit que l'élongation vraie de la Comète au ſoleil, dans l'orbite ſera plus grande que l'élongation rapportée à la ſphère apparente, ou bien que *C S* ſera > *S c* (*Fig.* 9.) Au contraire l'angle *S T C* ſera < *S t c*, ou *C S* < *S c*, lorsque la diſtance *S C* eſt < *S T*.

§. 9. La recherche du lieu de la Comète ou *ſa diſtance au ſoleil* égale celle du ſoleil à *la terre*, *ne laiſſe* pas de rencontrer pluſieurs difficultés. Pour tracer la route vers le lieu cherché & afin de diminuer le nombre de tâtonnemens, je commence par *déduire les longitudes d'une route* apparente de *la* Comète, déterminée par deux lieux *A* et *B*. (*Fig.* 9.) Car il eſt certain que les longitudes apparentes *V b* et les vraies *V e* doivent différer hors du lieu en queſtion, qu'elles doivent coïncider *au lieu* cherché *en c*, ou bien que *V e* ſera = *V b*; et enfin que la différence de ces longitudes croitra à meſure qu'elles s'approchent de celle du lieu cherché. L'on choiſira deux lieux de la Comète en *A* et *B*, dont l'un comme *A* ne ſera pas fort éloigné du périhélie, parceque la Comète atteindra la diſtance au ſoleil, égale à celle de la terre au ſoleil aux environs de l'anomalie de 90 degrés, à moins que la diſtance perihélie ne ſoit très petite. On ſaura auſſi conjecturer par les apparences de *la* Comète, quand elle s'approche ou s'éloigne du périhélie. Moyennant les latitudes géocentriques *A a* = *a* et *B b* = *b*, et les longitudes *V a*, *V b*, on déterminera le lieu géocentrique du Noeud ou *V E*, et l'inclinaiſon *E* de l'orbe apparente. *Avec* deux *latitudes presque* moyennes entre les lieux ſuppoſés en *A* & *B*, je calcule les deux longitudes, lesquelles étant comparées aux longitudes obſervées féront connoître vers quel côté des deux lieux *A* ou *B* le lieu cherché de la Comète ſera le plus avancé. Si la moindre différence des longitudes tomboit ſur un lieu plus proche de celui en *A*, le lieu cherché ſe trouveroit entre le lieu calculé et celui de *A*, ou au delà de *A*. J'ai inſinué, qu'il faudra choiſir deux lieux au milieu des extrêmes; en *A* et *B*, car ſi on les prenoit trop près de *A* et *B*, les longitudes calculées ne pourroient différer beaucoup des longitudes obſervées *V a*, *V b*; quoiqu' effectivement elles pourroient beaucoup différer les

unes des autres. Par la même raiſon il faudra prendre les lieux A et B à une diſtance aſſès conſidérable. Soit la différence des longitudes en A et B ou $Va - Vb = ba = g$. Qu'on partage ba également en o, on aura $ao = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}g$. Enfin ſoit $Eb = Z$, l'on fait que $\text{tang } z = \frac{\text{ſin }(a+b)}{\text{ſin }(a-b)} \cdot \text{tang } \frac{1}{2} g$. Or $Z = Eb + \frac{1}{2}g$, donc $Z - \frac{1}{2}g = Eb$, ou $Ea = Z + \frac{1}{2}g$, donc la longitude du noeud terreſtre ou $VE = Va - Ea = Vb - Eb$. Enſuite l'on trouve l'inclinaiſon par l'équation,

$$\text{tang. } E = \frac{\text{tang } b}{\text{ſin }(Z - \frac{1}{2}g)} = \frac{\text{tang } a}{\text{ſin }(Z + \frac{1}{2}g)}.$$ Pour la latitude donnée $cb = c$, on aura $\text{ſin } Eb = \frac{\text{tang } c}{\text{tang } E}$, & $Vb = VE + Eb$ = à la longitude du lieu c ſur l'orbe apparente.

§. 11. Je ne propoſerai aucun des articles de ma méthode, *ſans application* pour ſatisfaire aux conditions du Programme de l'*Illuſtre Académie*. Pour cet effet j'ai choiſi la Comète de 1769, & celà par pluſieurs raiſons. Elle a été obſervée aſſès long-temps, et aſſès exactement. Cependant elle a embaraſſé les calculateurs, qui ont trouvé des réſultats trés différens pour les Elémens de l'orbite ſelon que M. *Bernoulli* a remarqué dans ſon beau *recueil pour les Aſtronomes* page 225. C'eſt que le mouvement de cette Comète a été plutôt elliptique que parabolique dans le temps de ſon apparition comme on le verra dans la ſuite.

L'obſervation la plus proche du périhélie a été faite le 15. Septembre. Mais je choiſirai celle du 12 Septembre, parceque la latitude géocentrique étoit la plus grande. Enſuite j'employerai l'obſervation du premier Septembre

	Longitude	Latitude
12 Sept. $14^h\ 47'\ 19''$,	$Va = 4^s\ 4°31'45''$	$23°\ 44'\ 18'' = a$
1 Sept. $12^h\ 52'\ 23''$,	$Vb = 2^s\ 9°30'40''$	$14°\ 22'\ 43'' = b$

$$g = 1^s 25°\ 1'\ 5'' \qquad \frac{a+b}{2} = 19°\ 3'30''$$

$$\frac{g}{2} = 27°\ 30'\ 33'' \qquad \frac{a-b}{2} = 4°\ 40'48''$$

$\tang \tfrac{1}{2} g = 9{,}7166463$	$\tang a = 9{,}6432232$
$\sin \left\{ \frac{a+b}{2} \right\} = 9{,}5139239$	$\sin E a = 9{,}9997669$
$9{,}2305702$	$\tang E = 9{,}6434563$
$\sin \left\{ \frac{a-b}{2} \right\} = 8{,}9116402$	$E = 23^\circ 44' 59'' =$ à l'inclinaison
$\tang z = 0{,}3189300$	

$Z = 64^\circ\ 22'\ 5''$
$\tfrac{1}{2} g = 27^\circ\ 30'\ 33''$

$E a = 3^s\ 1^\circ\ 52'\ 38''$
$V a = 4^s\ 4^\circ\ 31'\ 45''$

$VE = 1^s\ 2^\circ\ 39'\ 7''$ = à la longitude du noeud géocentrique. Moyennant l'inclinaison E & la longitude apparente du Noeud $V\ E$ & deux latitudes intermédiaires entre celles $A\ a$, & $B\ b$, je calculerai les longitudes apparentes. Je choisirai les observations faites le 8 & le 7 Septembre.

8 Sept. $14^h 42' 50''$ Long. $3^s\ 11^\circ\ 12'\ 7''$	latitude. $22^\circ 3' 47'' = C$	7 Sept. $13^h 24' 38''$ Long. $3^s 5^\circ 22' 33''$	latitude $21^\circ 9' 31'' = C$
$\tang C = 9{,}6077842$		$\tang C = 9{,}5877600$	
$\tang E = 9{,}6434565$		$\tang E = 9{,}6434565$	
$\sin E b = 9{,}9643277$		$\sin E b = 9{,}9443035$	
$E b = 2^s 7^\circ\ 5' 39''$		$E b = 2^s 1^\circ 35' 55''$	
$V E = 1^s 2^\circ 39'\ 7''$		$V E = 1^s 2^\circ 39'\ 7''$	
$3^s\ 9^\circ 44' 46''$ longit. apparente		$= 3^s 4^\circ 15'\ 2''$ apparente	
$3^s\ 11^\circ\ 12'\ 7''$ longit. observée		$5^s\ 5^\circ 22' 33''$ observée	
$+\ 1^\circ 27' 21''$ différence		$+ 1^\circ\ 7' 31''$ différence	

Il résulte de ces calculs que la différence entre les longitudes apparentes & vraies va en diminuant du 8 au 7me Septembre. Ensorte que le lieu cherché tombera au delà du 7 Septembre, plus près du 1re Septembre que du douzieme. On pourroit même deja présumer que le lieu cherché sera entre le 4 & le 5 Septembre. Car le décroissement diurne entre les différences trouvées des longitudes est environ de 22', partant 22' font à 1 jour comme la plus petite différence trouvée ou $1^\circ 7\tfrac{1}{2}'$ est

à 3 jours, en sorte que le lieu en question répondra aux environs du 4 Septembre 13 heures; ou plutot il tombera entre le 4 & le 5 Septembre.

§. 12. L'on pourroit se contenter de s'être approché de cette manière du lieu cherché de la Comète, comme nous venons de le faire voir, Mais pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet & pour voir avec quelle exactitude on peut trouver le lieu où les distances du soleil à la Comète & à la terre sont égales, nous le déduirons de la comparaison d'entre les élongations vraies & apparentes. Parceque l'inclinaison & le lieu du noeud géocentrique varient de jour en jour, on ne sauroit employer deux lieux de la Comète trop éloignés l'un de l'autre pour représenter exactement *l'orbite* apparente; surtout lorsque le mouvement diurne de la Comète est de plusieurs degrés comme *est celui* de la Comète de 1769. C'est pourquoi je déterminerai le noeud & l'inclinaison par les observations du 6 & du 3 Septembre, entre les quelles se trouve le lieu cherché de la Comète. La longitude de la Comète étoit le 6 Septemb. $15^h\ 25'\ 35''$ en $3^s\ 0^\circ\ 36'\ 45''$ & *la latitude* $= 20^\circ\ 11'\ 14'' = a$. La longitude étoit le 3 Sept. $12^h\ 56'\ 8''$, en $2^s\ 16^\circ\ 40'\ 18''$, & la latitude $= 16^\circ\ 36' = b$. Calculant selon les formules du §. 11., on trouvera le lieu du noeud ou $VE = 1^s\ 2^\circ\ 33'\ 6''$, *l'inclinaison* E, moyennant la latitude a, $= 23^\circ\ 25'\ 32''$, & moyennant la latitude b, on trouvera $E = 23^\circ\ 12'\ 14''$; prennant le milieu il y aura $E = 23^\circ\ 18'\ 53''$.

(*Fig. 9.*) *L'élongation vraie dans l'orbite ou* CS se déduit aisément du triangle sphérique rectangle CeS. Car $\cos CS = \cos Ce \cos eS$, or $eS =$ différence des longitudes du soleil & de la Comète, & Cc est la latitude. Cherchons la vraie élongation CS, pour le 6 Septembre $15^h\ 25'\ 35''$.

Lieu du ☉ ou	$VS = 5^s\ 14^\circ\ 42'$	$\cos Ce = 9{,}9724666$
Lieu de la Comète,	$Ve = 3^s\ 0^\circ\ 36'\ 45''$	$\cos eS = 9{,}4380184$
	$eS = 2^s\ 14^\circ\ 5'\ 15''$	$= 9{,}4104850 = \cos CS$
		elong. vraie $CS = 75^\circ\ 5'\ 8''$.

Pour trouver l'élongation apparente cS, il faut d'abord chercher l'angle cSE, or on sait que

$$\operatorname{tang} cSE = \frac{\operatorname{tang} Ce}{\sin eS}.$$

$\operatorname{tang} Ce = 9{,}5654643$
$\sin eS = 9{,}9830313$
$\operatorname{tang} cSE = 9{,}5824330$

Donc $CSE = 20^\circ\ 55'\ 23''$,

On

On connoit dans le triangle $E\,c\,S$, les angles E & $c\,S\,E$, & le coté Compris $E\,S = V\,S - V\,E$, d'où l'on déduira le coté $c\,S$.

Il vaudra mieux se servir des formules que M. *Euler* a données dans les *Mémoires de l'Académie de Prusse* de 1753, page 254, que des analogies ordinaires, pour éviter les résultats douteux. Il faut calculer les deux formules suivantes.

$$\text{Tang}\left\{\frac{cS+cE}{2}\right\} = \frac{\cos\left\{\frac{E-S}{2}\right\}}{\cos\left\{\frac{E+S}{2}\right\}} \times \text{tang}\,\frac{ES}{2}; \;\&\; \text{tang}\left\{\frac{cS-cE}{2}\right\} = \frac{\text{sin}\left\{\frac{E+S}{2}\right\}}{\text{sin}\left\{\frac{E-S}{2}\right\}} \times \text{tang}\,\frac{ES}{2}$$

La demi-somme et la demi-différence des deux côtés étant données, on aura le côté $C\,S$.

$E = 23°\,18'\,53''$	$V\,S = 5^s\,14°\,42'$
$S = 20°\,55'\,23''$	$V\,E = 1^s\,2°\,33'\,6''$
$\frac{E+S}{2} = 22°\,7'\,8''$	$E\,S = 4^s\,12°\,8'\,54''$
$\frac{E-S}{2} = 1°\,11'\,45''$	$\frac{E\,S}{2} = 66°\,4'\,27''$

$\cos\frac{E-S}{2} = 9{,}9999052$	$\text{sin}\,\frac{E-S}{2} = 8{,}3195165$
$\cos\frac{E+S}{2} = 9{,}9668007$	$\text{sin}\,\frac{E+S}{2} = 9{,}5757994$
$0{,}0331045$	$8{,}7437171$
$\text{sin}\,\frac{E\,S}{2} = 0{,}3529604$	$\text{tang}\,\frac{E\,S}{2} = 0{,}3529604$
$\text{tang}\,\frac{cS+cE}{2} = 0{,}3860649$	$\text{tang}\,\frac{cS-cE}{2} = 9{,}0966775$

Donc $(c S + c E) = 67^\circ\ 39'\ 11''$
$(c S - c E) = 7^\circ\ 7'\ 16''$

$c S = 74^\circ\ 46'\ 27''$ = élongation apparente
$S C = 75^\circ\ 5'\ 8''$ = élongation vraie

Donc —— $18'\ 41''$ fait la différence entre les élongations. Parceque $C S > c S$, la Comète sera encore moins éloignée du soleil, que la terre

§. 9.

J'ai cherché par le secours de ces formules les élongations pour le 5 Sept. $11^h\ 0'\ 35''$. La longitude de la Comète étoit = $2^s\ 24^\circ\ 51'\ 42''$, celle du soleil = $5^s\ 13^\circ\ 32'\ 54''$, la latitude de la Comète $18^\circ\ 54'\ 10''$.

J'ai trouvé l'élongation *vraie* $C S = 79^\circ\ 18'\ 14''$ & l'autre $c S = 79^\circ\ 3'\ 22''$ dont la différence fait $+ 14'\ 52''$. La distance de la Comète au soleil est donc encore plus petite que celle du soleil à la terre, mais elle a augmenté, par ce que les élongations différent moins entr'elles le 5 que le *6 Septembre*.

Continuant les opérations pour le 4 Sept. $13^h\ 11'\ 52''$, *lorsque le lieu de la Comète* étoit en $2^s\ 20^\circ\ 47'\ 19''$, celui du soleil en $5^s\ 12^\circ\ 39'\ 56''$, la latitude = $17^\circ\ 49'\ 25''$, j'ai trouvé l'élongation *vraie ou* $C S = 82^\circ\ 16'\ 9''$ *& l'autre* $c S = 82^\circ\ 15'\ 38''$, la différence n'est *plusque de* $+ 31''$, *or cette* différence étant trop petite, l'on ne sera *pas tout à fait certain*, si la distance étoit au moment de l'observation un peu *plus petite ou* plus grande que celle du soleil à cause des variations du noeud *& de l'inclinaison* terrestres. Mais il est du moins sur que nous sommes tout près du lieu cherché. On voit donc que la conjecture que nous avons hazardée à la fin du §. 11., n'étoit pas si mal fondée.

§. 13. Soit que la distance périhélie différe peu de la distance de la terre au soleil, soit qu'il n'y ait point d'observations aux environs du lieu où les distances du soleil à la terre & a la Comète étoient égales, l'on se serviroit sans succès des méthôdes précédentes, quoique le Théoreme de M. *Lambert* pourra encore être de quelque utilité.

Parmi plusieurs manieres que j'avois imaginées, celle que je vais exposer m'a paru être la plus courte. (*Fig.* 14.) Le plan de la planche représente celui de l'Ecliptique ou se trouvent le soleil en *S* la terre en θ, t, T. Les vrais lieux de la Comète sont elevés au dessus de l'Ecliptique en *A*, *B*, *D*. Abaissant les perpendiculaires $A\,\chi$, $B\,c$, $D\,b$ sur le plan de l'Ecliptique en χ, c, b, les lignes $\theta\,\chi$,

$t\,c$, $T\,b$ feront les diſtances racourcies de la Comète à la terre. Je ſuppoſe d'avoir choiſi trois lieux éloignés d'un jour à l'autre, ou tout au plus de deux à deux jours. On pourra donc regarder le mouvement de la Comète ſelon $A\,D$, vu du ſoleil comme uniforme & rectiligne. Nommant T & t, les temps où les eſpaces AB, BD, ſont parcourus, il'y aura $A\,B : B\,D = T : t = \gamma\,c : b\,c$. Je ſuppoſe de plus deux diſtances racourcies égales comme $\theta\,\gamma$, $t\,c$. Cette ſuppoſition ne s'écartera pas beaucoup aux environs du Périgée de la Comète. Or il eſt facile de trouver à-peu-près le lieu du Périgée par les méthodes aſſes connues.

(*Fig.* 7.) Ainſi faiſant les angles $V\,T\,A$, $V\,T\,B$ &c. égaux aux élongations de la terre à la Comète, on connoîtra aiſément le rapport des diſtances géocentriques $T\,B$, $T\,A$, donc auſſi la ſituation de la ligne $A\,D$, & par conſéquent celle de la perpendiculaire $T\,P$, *dont le point P indiquera à-peu-près* le lieu du Périgée, qui ſe détermine auſſi ſans calcul par le temps où la Comète vue de la terre a paru ſe mouvoir avec plus de viteſſe. Les lieux du ſoleil & de la Comète du temps des trois obſervations étant donnés, on connoîtra les angles au ſoleil $\theta\,S\,t = \alpha$, $t\,S\,T = a$; de plus les élongations de la Comète au ſoleil, ou les angles $S\,\theta\,\gamma = \gamma$, $S\,t\,c = c$, $S\,T\,b = C$. De là on tire l'angle m, où les deux premières diſtances ſe coupent $= \gamma - c + \alpha =$ à la différence des longitudes en t & θ; de même l'angle $M = \gamma + a + \alpha$, & $\mu = c - C + a$. Qu'on prolonge les diſtances $S\,t$, & $b\,T$ jusqu'à leur concours en O. Il y aura ſin O ou ſin $(C-a) : S\,T = $ ſin $C : S\,O$, donc $t\,O = S\,O - S\,t = \frac{S\,T \sin C}{\sin (C-a)} - S\,t$. Puis, ſin $\mu : t\,O = \sin(C-a) : t\,\mu$, donc $t\,\mu = \frac{S\,T \sin C}{\sin \mu} - \frac{S\,t \sin (C-a)}{\sin \mu}$. De même l'on trouvera ſin r ou ſin $(c+a) : S\,t = \sin c : S\,r$, donc $T\,r = S\,T - S\,r = S\,T - \frac{S\,t \sin c}{\sin (c+a)}$. Enfin, ſin $\mu : T\,r = \sin (c+a) : T\,\mu$, donc $T\mu = \frac{S\,T \sin (c+a)}{\sin \mu} - \frac{S\,t \sin c}{\sin \mu}$. De la même manière on trouve $\theta\,M = \frac{S\,T \sin C}{\sin M} - \frac{S\,\theta \sin (C - \alpha - a)}{\sin M}$ & $m\,T = \frac{S\,T \sin (\gamma + a + \alpha)}{\sin M} - \frac{S\,\theta \sin \gamma}{\sin M}$.

Les angles m, μ, & les lignes θM, $t\mu$ étant connues, qu'on nomme x, les distances $\theta\gamma$, tc supposées égales. Qu'on abaisse de c & de γ, les perpendiculaires ce, γL, sur Tb. Or $L\gamma = M\gamma \sin M = (x - \theta M) \sin M$, & $ec = c\mu \sin \mu = (x - t\mu) \sin \mu$. Mais $\gamma L : ce = b\gamma : bc = T + t : t$, donc $T + t : t = (x - \theta M) \sin M : (x - t\mu) \sin \mu$, d'où l'on tire $x = \dfrac{(T+t)\, t\mu \sin \mu - t\,\theta M \sin M}{(T+t) \sin \mu - t \sin M}$.

L'on ne m'objectera pas le défaut que j'ai reproché aux methodes de Mrs. *Cassini* & *Bouguer* allegués aux §. 4. & 5., savoir que la situation de l'orbite rectiligne reduite γb n'est pas determinée. Mais en résumant le calcul, on parviendra à la même équation que l'orbite $b\gamma$, tombe au delà des points μ & m ou entre μ & les lieux de la terre en T & t. *D'ailleurs les signes des valeurs des lignes* TM, $t\mu$ &c. *indiqueront leurs situations. Si ces signes sont positifs, les lignes* TM, $t\mu$ *auront la position qu'elles ont dans la figure quatrieme; s'ils sont négatifs ces, lignes tomberont de l'autre coté des lieux de la terre* θ, t, T.

§. 14. Quoi que je devrois faire usage des observations du, 8, 9, 10 Septembre, parceque c'est vers ce temps la que la Comète étoit dans son perigée, je choisirai pourtant les observations du 4, 6, 8 *Septembre, parce que le soleil à été à la même distance de la terre & du soleil entre le 4 & le 5 de ce mois, j'ai en vue la distance pour le quatrième Septembre, afin de pouvoir comparer les résultats du théorème de M. Lambert* & ceux de ma méthôde; sans doute qu'elle auroit eu plus de succès, si j'avois employé des observations plus près du Périgée

4 Sept. $13^h 11' 12''$	6 Sept. $13^h 44' 22''$	8 Sept. $14^h 42' 50''$
Lieu du ⊙ $5^s 12° 39' 56''$	$5^s 14° 37' 53''$	$5^s 16° 37'$
Lieu de la com. $2^s 20° 47' 19''$	$3^s 0° 25' 37''$	$3^s 11° 12' 7''$
$\gamma = 81° 52' 37''$	$74° 12' 18'' = c$	$C = 65° 24' 53''$
log. $S\theta = 0{,}0031279$	log. $St = 0{,}0029060$	log. $ST = 0{,}0027650$

$m = 9° 37' 18''$, $\mu = 10° 46' 30''$, $M = 20° 24' 48''$

$\alpha = 1° 57' 57''$	$T = 2912{,}5$	$C - a = 63° 25' 46''$
$a = 1° 59' 7''$	$t = 2938{,}5$	$c - \alpha = 72° 14' 11''$
$\alpha + a = 3° 57' 4''$	$T + t = 5851$	$C - a - \alpha = 61° 23' 51''$
$\gamma + \alpha + a = 85° 49' 39''$		

$S\,T = 0{,}0027650$ $\quad S\,t = 0{,}0029060$
$\sin C = 9{,}9587277$ $\quad \sin(C-a) = 9{,}9515241$

$9{,}9614927$ $\quad 9{,}9544301$
$\sin \mu = 9{,}2717317$ $\quad = 9{,}2717317$

$0{,}6897610$ $\quad 0{,}6826984$
donc $4{,}89511$ $\quad 4{,}81613$
$4{,}81613$

$t\,\mu = 0{,}07898$

$S\,T = 0{,}0027650$ $\quad S\,\theta = 0{,}0031279$
$\sin C = 9{,}9587277$ $\quad \sin C - a - \alpha = 9{,}9437481$

$9{,}9615027$ $\quad 9{,}9468766$
$\sin M = 9{,}5425643$ $\quad = 9{,}5425643$

$0{,}4189384$ $\quad 0{,}4043123$
donc $2{,}62385$ $\quad 2{,}53688$
$2{,}53688$

$\theta\,M = 0{,}08697$

Les lignes $t\,\mu$, $\theta\,M$ étant trouvées on calculera x,

$T+t = 3{,}7672301$ $\quad t = 3{,}4681257$
$\sin \mu = 9{,}2717317$ $\quad \sin M = 9{,}5425643$

$3{,}0389618 =$ nomb. $1093{,}86$ $\quad 3{,}0106900 =$ nombre $1024{,}88$ $\quad 1093{,}86$
$t\,\mu = 8{,}8925398$ $\quad \theta\,M = 8{,}9393695$

$68{,}98$ denom.

$1{,}9315016$ $\quad 1{,}9500595$
donc $84{,}4087$ $\quad 89{,}1373$ donc $4{,}7287 = 0{,}6747326$
$84{,}4087$ $\quad 68{,}98 = 1{,}8387232$

numer. $= 4{,}7286$ $\quad 8{,}8360094$
donc $x = 0{,}06855$

§. 15. Nous n'avons jusqu'ici déterminé qu'une distance de la Comète au soleil selon le theorême de M. *Lambert;* reste à en déduire la distance de la Comète à la terre. Malheureusement il se rencontre une difficulté qui rend ce theorême moins utile qu'il ne seroit d'ailleurs. Dans le triangle $A\,S\,\theta$, on connoit bien les distances $S\,A$ & $S\,\theta$, mais pour en conclure la distance $\theta\,A$, il faudroit connoitre l'angle $S\,\theta\,A$,

J'ai cherché jusqu'ici en vain les moyens de trouver cet angle. Cet angle $S\theta A$ n'eſt plus l'angle CTS ou l'arc CS de la 9. figure (Ce & CS étant la latitude & & l'élongation géocentreque) à cauſe de l'inclinaiſon de l'orbite de la Comète ſur l'Ecliptique. Cependant l'angle $S\theta A$ ne diffère pas tant de l'arc CS, qu'on ne pourroit ſubſtituer celui-ci pour l'angle $S\theta A$, afin d'en déduire à peu près une diſtance de la Comète à la terre ou θA. Mais il faudra enſuite rectifier la diſtance au ſoleil SA moyennant la diſtance θA ou la racourcie $\theta\gamma$, comme je le ferai voir dans le ſecond article. Nous avons remarqué, que le 4 Sept. 13h 11′ 52″ la latitude de la Comète ou Ce étoit $= 17^\circ\, 49'\, 25''$ & l'élongation $cS = 81^\circ\, 52'\, 37''$. Or cos CS = cos Ce. Cos CS, d'ou l'on déduit $CS = 82^\circ\, 16'\, 9''$, qui meſure à peu près l'angle $S\theta A$. Or dans le cas préſent, le triangle θSA eſt iſoſcèle à cauſe de $SA = S\theta$,

donc $\theta A = 2\, S\theta \cos CS$,	log. $\theta A = 9{,}4321727$
or $S\theta = 0{,}0031279$	cos $Ce = 9{,}9786385$
cos $CS = 9{,}1280148$	
log. 2 $= 0{,}3010300$	log. $\theta\gamma = 9{,}4108112$
log. $\theta A = 9{,}4321727$	

Donc la diſtance racourcie $\theta\gamma = 0{,}25752$. *Cette diſtance racourcie diffère* beaucoup de celle qui a été trouvée dans le §. *précédent*, *la quelle*, *comme j'ai inſinué*, auroit été plus exacte, ſi elle *avoit été dérivée d'obſervations* moins éloignées l'une de l'autre & du périgée. Je *crois que malgré* l'uſage difficile du theorême de M. *Lambert*, autant vaudra eſtimer la diſtance de la Comète à la terre ſelon cette méthode que ſelon la nôtre. Car ſuppoſé le cas, qu'il n'y auroit point d'obſervation à cinq ou ſix jours *du* lieu de la Comète à diſtances égales, l'on devroit augmenter ou diminuer la diſtance du ſoleil à la terre de 2000 à 3000 parties, & moyennant cette diſtance déterminer la diſtance de la Comète à la terre comme il vient d'être dit. Cependant il ne faut pas mettre les choſes au pis aller & nous accabler d'une multitude de difficultés. Si les obſervations de la Comète ne ſont point du tout avantageuſes, on fera très ſagement de renoncer à la recherche de l'orbite. Je m'imagine qu'on aurait dû prendre ce parti à l'égard de pluſieurs Comètes.

SECOND ARTICLE.

Sur la Détermination d'une seconde distance de la Comète à la terre.

§. 16. Pour trouver une seconde distance de la Comète à la terre, je serois obligé de supposer le mouvement de la Comète uniforme, d'un jour à l'autre. Cette supposition ne m'empéchera pas de déterminer *assés exactement* la seconde distance à un intervalle *de huit ou de douze* jours de la première. Conservant les dénominations & les suppositions faites dans le §. 14., j'abaisserai les lieux de la Comète, c, C les perpendiculaires $c\,l$, $C\,L$ sur la première distance donnée $\theta\,\gamma$. Si l'on veut procéder avec beaucoup d'exactitude, les lieux de la Comète en γ, c, C, ne doivent répondre qu'aux intervalles d'un jour. Les ligne $\theta\,m$, $\theta\,M$, $M\,T$, (*Fig.* 15.) se déterminent par les formules du §. 14. Il y aura $e\,\gamma = c\,e$ cot. γ, & $e\,c$ cot. $m = e\,m$, donc, $M\,\gamma = c\,e$ (cot. γ + cot. m). De même on aura $L\,C$ cot. $\gamma = L\,\gamma$, & $L\,C$ cot. $M = M\,L$, donc $M\,\gamma = L\,C$ (cot. γ + cot. M). Or $L\,C : e\,c = T + t : T$, donc $\frac{M\gamma}{m\gamma} = \frac{T+t}{T}\left\{\frac{\text{cot. }\gamma + \text{cos }M}{\text{cot. }\gamma + \text{cos }m}\right\}$, d'ou l'on déduira

$$\text{tang } \gamma = \frac{\frac{\gamma M}{\gamma m} = \frac{T+t}{T}}{\frac{T+t}{T}\text{ cot. } M - \frac{\gamma M}{\gamma m}\text{ cot. } m}$$

Ensuite, $\frac{M\gamma,\ \text{fin }\gamma}{\text{fin}(\gamma + M)} = C\,m$, & enfin la seconde distance $T\,C = C\,m + M\,T$. Or fachant les lignes $\theta\,m$, $\theta\,M$, $m\,T$, par les formules citées, on connoîtra $\gamma\,M = \gamma\,\theta - \theta\,M$, & $\gamma\,m = \gamma\,\theta - \theta\,m$, donc on saura la seconde distance racourcie de la Comète à la terre, qui répond à un intervalle de deux jours par rapport à la première, par exemple au 6 Septembre. Prenant la distance trouvée

$C\ T$ pour une première diſtance $\theta\,\gamma$, & répétant le calcul par le ſecours des formules données, l'on trouvera une ſeconde diſtance $C\ T$ qui répondra au 8 Septembre. Conſidérant la diſtance du 8 Sept. comme une premiere $\theta\,\gamma$, on en déduira de la même maniere la diſtance pour le 10 Septembre. De cette façon on ſera en état de déterminer aſſès près deux diſtances pour un intervalle de 8 à 12. jours.

Or ſans me flatter je crois que ma méthôde a pluſieurs avantages ſur d'autres.

1) L'on eſt obligé de déterminer les deux diſtances pour un trop court eſpace de temps.

2) La variation du mouvement de la Comète influe plus ſur les autres méthodes que ſur la mienne, parce *qu'on eſt obligé de placer à un intervalle* de trois à quatre jours l'une de l'autre, pour trouver deux diſtances pour un *plus long eſpace* de jours. *Au contraire, je paſſe d'une jour à l'autre; or dans ces courts paſſages* le mouvement ne peut pas être varié ſi fort.

3) Je crois auſſi ma méthôde plus expéditive. Il eſt vrai qu'il faut faire à trois ou quatre repriſes le calcul ſi l'on veut être très ſcrupuleux. Mais ce travail ſera amplement compenſé, lorsqu' ayant trouvé la premiere *diſtance* peu exacte, l'on y ſubſtitue une autre plus juſte. Alors on ſera obligé de refaire *ſelon* les autres méthôdes les calculs presque depuis le commancement; au lieu qu'il n'y a que deux quantités, ſavoir $\frac{\gamma M}{\gamma m}$ & $\frac{\gamma M}{\gamma m}$ cot. m, qui éprouvent quelque changement par la diſtance $\theta\,\gamma$ nouvellement ſuppoſée. Or on trouve ſans difficulté les lignes $\gamma\,M$, & $\gamma\,m$, car $\gamma\,M =$ la nouvelle $\theta\,\gamma - \theta\,M$ & $\gamma\,m = \theta\,\gamma - \theta\,m$. Or $\theta\,M$, $\theta\,m$ ſont conſtantes.

Pour faire uſage de nos formules, *il faut ſe rappeller* que 1) $\theta\,m = \frac{S\,t \sin C}{\sin m} - \frac{S\,\theta \sin (c - \alpha)}{\sin m}$. 2) $\theta\,M = \frac{S\,T \sin C}{\sin M} - \frac{S\,\theta \sin (C - \alpha - a)}{\sin M}$ & 3) $m\,T = \frac{S\,T \sin (\gamma + \alpha + a)}{\sin m} - \frac{S\,\theta \sin \gamma}{\sin m}$. Et enſuite que M & m ſont des quantités egales aux différences des longitudes de la Comète en γ, C & γ, c.

§ 17. Nous

§ 17. Nous chercherons la seconde distance à l'intervalle de 8 jours de la première, & pour faire mieux voir le succès de notre méthôde, nous ne dresserons les calculs que sur des observations de deux à deux jours. D'ailleurs nous conserverons les observations pour le 4, 6, 8 Septembre exposées & en partie calculées dans le §. 14.

$S t = 0{,}0029060$	$S \theta = 0{,}0031279$
$\sin c = 9{,}9832843$	$\sin (c-\alpha) = 9{,}9787978$
$9{,}9861903$	$9{,}9819123$
$\sin m = 9{,}2230846$	$9{,}2230846$
$0{,}7631057$	$0{,}7588277$
donc $5{,}79570$	$5{,}73889$
$5{,}73889$	
$\theta m = 0{,}05681$	

$S T = 0{,}0027650$	$S \theta = 0{,}0031079$
$\sin (\gamma + \alpha + a) = 9{,}9988474$	$\sin \gamma = 9{,}9956207$
$0{,}0016124$	$9{,}9987286$
$\sin M = 9{,}5425643$	$9{,}5425643$
$0{,}4590481$	$0{,}4561643$
donc $2{,}87772$	$2{,}85867$
$2{,}85867$	
$T M = 0{,}01905$	

On a trouvé précédemment $\theta M = 0{,}08697$.

Moyennant les lignes θm, $T M$, θM &c., on calculera la tangente de l'angle $\theta \gamma C$ selon la formule proposée.

La première distance $\theta \gamma$ a été déterminée $= 0{,}25752$. selon §. 15. par conséquent

$\theta \gamma = 0{,}25752$	$\theta \gamma = 0{,}25752$
$\theta M = 0{,}08697$	$\theta m = 0{,}05681$
$M \gamma = 0{,}17055$	$m \gamma = 0{,}20071$
$\log M \gamma = 9{,}2318517$	$T + t = 3{,}7672301$
$\log m \gamma = 9{,}3025690$	$T = 3{,}4642659$
	$0{,}3029642$

Donc $\frac{M\gamma}{m\gamma} = 9{,}9292827$
cot $m = 0{,}7707627$
$0{,}7000454$
donc $5{,}01240$

cot $M = 0{,}4292684$
$0{,}7322326$

donc $\frac{T+t}{T} = 2{,}00893$.
nombre $= 5{,}39800$
$5{,}01240$
denom. $= 0{,}38560$

$\frac{T+t}{T} = 2{,}00893$ log. $1{,}15920 = 0{,}0641209$

$\frac{M\gamma}{m\gamma} = 0{,}84973$ log. $0{,}38560 = 9{,}5861370$

$1{,}15920$ — tang $\gamma = 0{,}4779839$, donc $\gamma = 108^\circ\ 24'\ 57''$
$M = 20^\circ\ 24'\ 48''$
$\gamma + M = 128^\circ\ 48'\ 45''$

De plus, sin $\gamma = 9{,}9772074$
log. $\gamma\ M = 9{,}2318517$
$9{,}2090591$
sin $\gamma + M = 9{,}8936600$ donc $C\ M = 0{,}20672$
log. $C\ M = 9{,}3153991$ $\quad M\ T = 0{,}01905$
$C\ T = 0{,}22577$

Ainsi la diſtance racourcie de la terre à la Comète pour le 8 Septembre eſt exprimée par 0,22577, le rayon moyen de la terre au ſoleil étant = 1.

Or comme l'eſpace de quatre jours eſt trop court pour en déduire les élémens de l'orbite de la Comète, nous y ajouterons encore quatre jours pour déterminer deux diſtances pour l'intervalle de huit jours. Pour cet effet nous répéterons le calcul; ſuppoſons pour première diſtance $\theta\ \gamma = 0{,}22577$, celle que nous venons de trouver pour le 8 Septembre.

8 Sept. $14^h\ 42'\ 50''$	10 Sept. $14^h\ 16'\ 50''$	12 Sept. $14^h\ 47'\ 19''$
$S\ \theta = 0{,}002765$	$S\ T = 0{,}0024280$	$S\ T = 0{,}0021900$
Lieu du ☉, $5^s\ 16^\circ\ 37'$	lieu du ☉, $5^s\ 18^\circ\ 33'\ 49''$	— $5^s\ 20^\circ\ 31'\ 3''$
Lieu de la com. $3^s\ 11^\circ\ 12'\ 7''$	lieu de la com. $3^s\ 22^\circ\ 43'\ 29''$	— $4^s\ 4^\circ\ 31'\ 45''$
$\gamma = 65^\circ\ 24'\ 53''$	$c = 55^\circ\ 50'\ 20''$	$C = 45^\circ\ 59'\ 18''$

$m = 11° 31' 22''$	$M = 23° 19' 38''$	
$\alpha = 1° 56' 49''$	$T = 2854$	$C - \alpha = 53° 53' 31''$
$a = 1° 57' 14''$	$t = 2910,5$	$C - \alpha - a = 42° 5' 15''$
$\alpha + a = 3° 54' 3''$	$T + t = 5764,5$	$\gamma + \alpha + a = 69° 18' 56''$

$S\,t = 0,0024280$ $S\,\theta = 0,0027650$
sin $c = 9,9177480$ sin $(c - \alpha) = 9,9073614$

9,9201760 9,9101264
sin $M = 9,3005030$ — — 9,3005030

0,6196730 0,6096234
donc 4,16556 donc 4,07026
4,07026

$0,09530 = \theta\,m$

$S\,T = 0,0021900$ $S\,\theta = 0,0027650$
sin $C = 9,8568487$ sin $(C - \alpha - a) = 9,8262463$

9,8590387 9,8290113
sin $M = 9,5976753$ — — 9,5976753

0,2613634 0,2313360
donc 1,82542 — 1,70343
1,70343

$0,12199 = \theta\,M.$

$S\,T = 0,0021900$ $S\,\theta = 0,0027650$
sin $(\gamma + \alpha + a) = 9,9710622$ sin $\gamma = 9,9587277$

9,9732522 9,9614927 2,38000
sin $M = 9,5976753$ — 9,5976753 nombre $=$ 2,31110

0,3765769 0,3638174 $T\,M = 0,06890$
donc 2,38000

Les lignes $\theta\,m$, $\theta\,M$, $T\,M$ étant calculées, on cherchera l'angle $\theta\,\gamma\,C$. Il faut se rappeller que $\theta\,\gamma = 0,22577$

$\theta\,\gamma = 0,22577$ $\theta\,\gamma = 0,22577$
$\theta\,M = 0,12194$ $\theta\,m = 0,09530$

$\gamma\,M = 0,10383$ $\gamma\,m = 0,13047$

$$\log.\ \gamma M = 9{,}0163229 \qquad T+t = 3{,}7607616$$
$$\log.\ \gamma m = 9{,}1155107 \qquad T = 3{,}4554540$$
$$9{,}9008122 = \log.\ \frac{\gamma M}{\gamma m} \qquad 0{,}3053076 = \log.\ \frac{T+t}{T}$$
$$\cot m = 0{,}6906546 \qquad \cot M = 0{,}3652940$$
$$0{,}5914668 \qquad 0{,}6706016 \text{ nombr. } 4{,}68384$$
$$3{,}91033$$
$$\text{denom.} + 0{,}77351$$

$$\frac{\gamma M}{\gamma m} = 0{,}79582 \quad \Big| \quad \log.\ 1{,}22398 = 0{,}0877740$$
$$\frac{T+t}{T} = 2{,}01980 \quad \Big| \quad \log.\ 0{,}77251 = 9{,}8884659$$
$$\text{numer.} - 1{,}22398 \quad \Big| \quad \tang \gamma = -0{,}1993081$$

$$\gamma = 122^\circ\ 17'\ 30'' \quad \Big| \quad \sin \gamma = 9{,}9270312$$
$$M = 23^\circ\ 19'\ 38'' \quad \Big| \quad \gamma M = 9{,}0163229$$
$$\gamma + M = 145^\circ\ 37'\ 8'' \quad \Big| \quad 3{,}9433541$$
$$\text{nombre } C M = 0{,}15543 \quad \sin(\gamma+M)\ 9{,}7518078$$
$$T M = 0{,}06890 \qquad 9{,}1915463$$
$$C T = 0{,}22433$$

La diſtance racourcie de la Comète à la terre, pour le 10 Septembre 14^h eſt donc $= 0{,}22433$, celle du 4 Septembre 13^h étant $= 0{,}25752$. Or celle du 8 Septembre 14^h étoit $= 0{,}22577$ d'où il paroit que la Comète a été à ſon périgée vers le dix Septembre.

TROISIEME ARTICLE.

Sur la recherche du temps dans lequel le ſecteur parabolique eſt décrit.

§. 18. Pour déterminer le temps dans lequel un ſecteur parabolique eſt décrit, il faut connoître les deux rayons vecteurs avec l'angle compris. Il s'agit donc d'abord de déduire des diſtances géocentriques racourcies, des diſtances vraïes héliocentriques $S\,T$. Dans le triangle $C\,S\,T$ ſont donnés la diſtance racourcie $C\,T$, la diſtance du ſoleil à la terre, (*Fig.* 5.) $S\,T$ & l'angle compris T ou l'élongation de la Comète au ſoleil.

1) On trouve l'angle C ou S par cette analogie $S\,T + C\,T : S\,T - C\,T =$

$$\text{tang}\left\{90^\circ - \frac{T}{2}\right\} : \text{tang}\left\{\frac{C - S}{2}\right\} \text{ ou poſant } \frac{S\,T}{C\,T} = \text{tang } \phi,$$

ſi $S\,T > C\,T$, il y aura $\text{tang}\,\frac{C-S}{2} = \frac{\text{tang}\,\phi + 1}{\text{tang}\,\phi - 1}\,\text{tang}\left\{90^\circ - \frac{T}{2}\right\}$ ou bien

$$\text{tang}\left\{\frac{C - S}{2}\right\} = \text{tang}\left\{\phi - 45^\circ\right\} \times \text{tang}\left\{90^\circ - \frac{T}{2}\right\}:$$

Or $90^\circ - \frac{T}{2} = \frac{C + S}{2}$, d'où l'on déduira les angles C & S.

2) Soient G & H, les latitudes géocentriques & héliocentriques, on aura

$$\text{tang}\,H = \text{tang}\,G \times \frac{\text{ſin}\,S}{\text{ſin}\,T}.$$

3) La diſtance racourcie au ſoleil $C\,S = \frac{\text{tang}\,G}{\text{tang}\,H} \times C\,T.$

4) Enfin la vraie diſtance au ſoleil ſera $= \frac{C\,S}{\cos H}.$

5) Soit M le lieu de la terre, il y aura $M + S =$ longitude héliocentrique de la Comète (*Fig.* 16.)

6) Soient LV, λV les deux longitudes héliocentriques de la Comète qui répondent aux deux diſtances données, on aura $LV - V\lambda = L\lambda =$ l'angle $E =$ mouvement héliocentrique de la Comète ſur l'Ecliptique. Les arcs $LC = H$ & $lc = h$ repréſentent les latitudes héliocentriques trouvées par Nro. 2. Faiſant paſſer l'arc du grand cercle $C\,c\,N$ par les lieux C & c, le lieu héliocentrique du Noeud ſera en N, & l'inclinaiſon de l'orbite ſe meſure par l'angle $C\,N\,L$. Or nommant $\frac{L\lambda}{2} = \frac{g}{2}$, & $\lambda N = Z$, nous avons vu § 10. que tang. $Z = \text{tang}\,\frac{1}{2}g.\frac{\sin\,(H+h)}{\sin\,\frac{1}{2}\,(H-h)}$

Par conſéquent $\lambda N = Z - \frac{1}{2}g$, & longitude du noeud ou $NV = \lambda V - \lambda N$.

7) Donc tang. de *l'inclinaiſon* $= \frac{\text{tang.}\ h}{\sin\,(Z - \frac{1}{2}g)} = \text{tang.}\ N$.

8) Enſuite $\sin\,c\,N = \frac{\sin\,h}{\sin\,N}$ & $\sin\,C\,N = \frac{\sin\,H}{\sin\,N}$, d'où l'on déduit $C\,c = C\,N - c\,N$, or cet arc meſure l'angle compris entre les deux rayons vecteurs. (*Fig.* 11.) Si SM, SN ſont les deux rayons vecteurs l'angle MSN ſe meſure par l'arc $C\,c$.

§. 19. Moyennant les 8 formules nous calculerons deux rayons vecteurs pour le 4 & 12 *Septembre & l'angle du ſecteur*, & *enfin le lieu du noeud & l'inclinaiſon* de l'orbite, dont nous ferons uſage ci-après.

Le 4 Sept. $13^h\ 11'\ 52''$	Le 12 Sept. $14^h\ 47'\ 19''$
Latitude $G = 17°\ 49'\ 25''$	$G = 23°\ 44'\ 18'' =$ latitude géocentrique
$S\,T = 0{,}0031279$	$S\,T = 0{,}0021900$
$C\,T = 9{,}4108112$	$C\,T = 9{,}3539162$
tang $\phi = 0{,}5923167$	tang $\phi = 0{,}6482738$
$\phi - 45° = 30°\ 39'\ 30''$	$\phi - 45° = 32°\ 19'\ 57''$
$T = 81°\ 52'\ 37''$	$T = 45°\ 59'\ 18''$
$90° - \frac{1}{2}T = 49°\ 3'\ 42'' = \frac{C+S}{2}$	$90° - \frac{1}{2}T = 67°\ 0'\ 21'' = \frac{C+S}{2}$
tang$(\phi - 45°) = 9{,}7729367$	tang$(\phi - 45°) = 9{,}8013819$
tang$(90° - \frac{1}{2}T) = 0{,}0617810$	tang$(90° - \frac{1}{2}T) = 0{,}3722710$

tang $\frac{C-S}{2} = 9,8347177$

$\frac{C-S}{2} = 34^\circ\ 21'\ 5''$

$\frac{C+S}{2} = 49^\circ\ 3'\ 42''$

$S = 14^\circ\ 42'\ 27''$

ſin $S = 9,4047382$

tang $G = 9,5072074$

$8,9119456$

ſin $T = 9,9956207$

tang $h = 8,9163249$

latit. hélioc. $h = 4^\circ\ 42'\ 53''$

tang $G = 9,5072074$

$C\ T = 9,4108112$

$8,9180186$

tang $h = 9,9163249$

$S\ C = 0,0016937$

cos $h = 9,9985280$

Log. Diſt. vraie $= 0,0031657$

Lieu de la terre, $11^s 10^\circ 39' 56''$

S — $14^\circ 42' 37''$

$\lambda V = 11^s 27^\circ 22' 33''$

$\frac{H+h}{2} = 5^\circ\ 38' 20''$

$\frac{H-h}{2} = 55' 27$

tang $\frac{C-S}{2} = 0,1736529$

$\frac{C-S}{2} = 56^\circ\ 9'\ 40''$

$\frac{C+S}{2} = 67^\circ\ 0'\ 21''$

$S = 10^\circ\ 50'\ 41''$

ſin $S = 9,2744896$

tang $G = 9,6432232$

$8,9177128$

ſin $T = 9,8568487$

tang $H = 9,0608641$

$H = 6^\circ 33' 46''$ = latit. héliocent

tang $G = 9,6432232$

$C\ T = 9,3539162$

$8,9971394$

tang $H = 9,0608641$

$C\ S = 9,9362753$

cos $H = 9,9971446$

$9,9391307$ = Log. Diſt. vraie

$11^s\ 20^\circ\ 31'\ 3''$

$10^\circ\ 50'\ 41'' = S$

$0^s\ 1^\circ\ 21'\ 44'' = L\ V$ lieu héliocentrique

$11^s\ 27^\circ 22'\ 33'' = \lambda V$

$3^\circ\ 59'\ 11'' = L\ \lambda = g$

$1^\circ\ 59'\ 36'' = \frac{1}{2} g$

Tang $\frac{1}{2}g$ = 8,5416332	donc Z = 11° 58′ 16″	
fin $\frac{1}{2}(H+h)$ = 8,9923696	$\frac{1}{2}g$ = 1° 59′ 36″	
7,5340028	λN = 9° 58′ 40″ diſtance au noeud $= Z - \frac{1}{2}g$	
fin $\frac{1}{2}(H-h)$ = 8,2076088	λV = 11ˢ 27° 22′ 33″	
tang Z = 9,3263940	NV = 11ˢ 17° 23′ 53 = lieu du noeud	
tang h = 8,9163249	fin H = 9,8580150	fin h = 8,9148432
fin $Z - \frac{1}{2}g$ = 9,2387139	fin N = 9,5999100	fin N = 9,5999100
tang N = 9,6776110	fin CN = 9,4581050	fin cN = 9,3149332
donc l'inclinaiſon = 23° 27′ 17″	CN = 16° 41′ 28″	
	cN = 11° 55′ 5″	
	Cc = 4° 46′ 23″ = angle Compris MSN.	

§. 20. Je pourrois propoſer pluſieurs formules pour déduire les anomalies des deux rayons vecteurs & l'angle compris MSN. Soit $SN > SM$, l'anomalie cherchée $ASM = \phi$, la différence des deux anomalies ou $MSN = \pi$, donc l'anomalie $ASN = \phi + \pi$. (*Fig.* 11.) Soit la diſtance périhélie $AS = p$. On ſait que $SN = \frac{p}{\left\{\cos\frac{\phi+\pi}{2}\right\}^2}$ & $SM = \frac{p}{\left\{\cos\frac{\phi}{2}\right\}^2}$ d'ou l'on tire $\sqrt{\frac{SN}{SM}} = \frac{\cos\phi}{\cos\frac{\phi+\pi}{2}}$

Soit $\frac{SN}{SM} = \text{tang}\,\alpha$, il y aura $\sqrt{\text{tang}\,\alpha} = \frac{\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \text{fin}\frac{\phi}{2}\,\text{fin}\frac{\pi}{2}} =$

$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2} - \text{tang}\frac{\phi}{2}\,\text{fin}\frac{\pi}{2}}$ d'où l'on tire $\text{tang}\frac{\phi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\text{tang}\,\alpha} - 1}{\text{fin}\frac{\pi}{2}\sqrt{\text{tang}\,\alpha}}$

Mais je doute qu'on trouve une formule plus facile en pratique que celle que M. de *la Caille* a donnée dans *ſes Leçons d'Aſtronomie*. Soit $x = \frac{2\phi+\pi}{4}$ & $a = \frac{\pi}{4}$, il

il y aura $a + x = \frac{\phi + \pi}{2}$ & $x - a = \frac{\phi}{2}$; Donc $\sqrt{\tang \alpha} = \frac{\cos(a-x)}{\cos(a+x)} =$ $\frac{\cos a \cos x + \sin a \sin x}{\cos a \cos x - \sin a \sin x} = \frac{1 + \tang a \tang x}{1 - \tang a \tang x}$. Soit de plus $\tang a \tang x =$ $\tang \theta$, par conſéquent $\sqrt{\tang \alpha} = \frac{1 + \tang \theta}{1 - \tang \theta} = \tang(\theta + 45°)$.

Or ayant trouvé l'angle θ, on aura $\tang x = \frac{\tang \theta}{\tang a}$, & enfin connoiſſant a, il s'enſuivra que ϕ ou $ASM = 2x - 2a$, & $\phi + \pi$ ou $ASN = 2a + 2x$.

$\log. SN = 0{,}0031657$
$\log. SM = 9{,}9391307$
$\tang \alpha = 0{,}0640350$

$a = \frac{Cc}{4} = 1°\ 11'\ 36''$
$2a = 2°\ 23'\ 12''$

$\tang \theta = 8{,}5664135$
$\tang a = 8{,}3186077$
$\log. \tang x = 0{,}2478058$
donc $2x = 121°\ 3'\ 2''$
$-\ 2a = 2°\ 23'\ 12''$
$ASN = 123°\ 26'\ 14''$

$\sqrt{\tang \alpha} = 0{,}0320175 = \log. \tang(\theta + 45°)$,
donc $\theta + 45° = 47°\ 6'\ 37''$, donc $\theta = 2°\ 6'\ 37''$
& $ASM = \phi = 118°\ 39'\ 50''$

Avec les anomalies on déterminera la diſtance périhélie $AS =$ $SM\left\{\cos\frac{ASM}{2}\right\}^2 = SN\left\{\cos\frac{ASN}{2}\right\}^2 = p$.

$$\cos\frac{ASN}{2} = 0{,}6755970$$

$$\log. \cos\left\{\frac{ASM}{2}\right\}^2 = 9{,}3511940$$

$$\log. SN = 0{,}0031657$$

$$\log. AS = 9{,}3543597,\ \text{donc}\ AS = 0{,}22613$$

§. 21. Reſte à déterminer le temps dans lequel le ſecteur MSN a été décrit. On ſait que le temps pour l'anomalie ASN ou T exprimé en jours eſt $=$ $cp\sqrt{2p}$. $\left(\tang\left\{\frac{\phi+\pi}{2}\right\} + \frac{1}{3}\tang\left\{\frac{\phi+\pi}{2}\right\}^3\right)$ & le temps pour l'anomalie ASM

ou $t = c\,p\sqrt{2p}\left\{\text{tang}\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{3}\,\text{tang}\frac{\Phi^3}{2}\right\}$, posant $c = 58',13$ = mouvement diurne moyen du soleil. En conséquence de ces formules le temps cherché sera = $T - t$. On voit donc qu'on pourra moyennant des formules algébraiques déterminer le temps pour le secteur *M S N*. Mais ce calcul étant assés long à faire, & M. *de la Lande* ayant donné dans la nouvelle édition de son excellente *Astronomie* des tables très exactes pour trouver les temps par le secours des anomalies & réciproquement; je ne me ferai aucun scrupule de chercher *les temps* par le moyen des tables. Si l'on vouloit s'obstiner à faire tout le calcul par des formules on devroit, il me semble, aussi mettre à l'écart les tables de sinus, & les déduire des formules.

On sait que les tables sont dressées sur la distance périhélie = 1 *distance moyenne du soleil à la terre. Supposons deux anomalies égales pour la* Parabole *des tables*, & pour une autre, dont la *distance périhélie est* $= p$. *Soit le temps des tables* $= \theta$, & le temps cherché $= T$, il suit des formules que nous venons de donner que $1 : \theta = p\sqrt{p} : T$, donc $T = \theta\sqrt{p^3}$ pour l'anomalie *A S N*. Soit le temps tabulaire pour l'anomalie *A S M* = *S*, il y aura $t = S\sqrt{p^3}$, d'où $T - t = (\theta - S)\sqrt{p^3}$ = temps pour le secteur *M S N*. *Ainsi l'on n'aura qu'à prendre la différence des temps tabulaires, qui répondent aux anomalies A S N, A S M*, & multiplier cette différence par $\sqrt{p^3}$.

A l'anomalie *A S N* = 123° 26′ 14″ répondent 328, 74 jours = θ
——— *A S M* = 118° 39′ 50″ ——— 270, — — = *S*

log. p	= 9,3543597		
log. p^3	= 18,0630791		58, 74 = $\theta - S$
log. $\sqrt{p^3}$	= 9,0315396		
log. $\theta - S$	= 1,7689339		
log. $T - t$	= 0,8004735		

donc $T - t = 6,316$ jours. Mais il y a un intervalle de 8,066 jours entre les deux lieux observés, donc l'erreur se réduit à 1,75 jours.

QUATRIÈME ARTICLE.

§. 22. La différence qu'on vient de trouver entre le temps calculé & obſervé, eſt ſi conſidérable, qu'elle feroit préjudiciable à l'uſage du theorême de M. *Lambert*, ſi l'on ne la pouvoit disculper par des raiſons que nous alléguerons dans la ſuite. Par rapport à la méthôde de correction, que nous expoſerons dans le ſixieme article, l'on ſera obligé de faire une autre ſuppoſition pour la première *diſtance* du ſoleil à la Comète. Il faudroit diminuer la *diſtance ſuppoſée*, *ſi* l'obſervation du 4 Septembre étoit *moins avancée que le lieu* de la Comète ou les diſtances du ſoleil à la Comète & à la terre deviennent égales, & il faudra l'augmenter, ſi l'obſervation étoit plus *avancée*. *Or ayant trouvé une petite différence* entre les lieux vrais & apparens de la Comète §. 9. & d'ailleurs une différence très conſidérable entre les temps calculés & obſervés, il paroit bien que la diſtance ſuppoſée ne remplace pas l'obſervation, mais qu'il eſt, d'ailleurs très incertain, ſi elle doit être augmentée ou diminuée. Parceque le temps *calculé* eſt *plus petit* que le temps obſervé, il paroit plus probable d'augmenter cette *diſtance* que de la diminuer, afin d'augmenter la *diſtance* périhélie & le temps même. *Si la diſtance de la Comète au ſoleil S C* augmente (*Fig.* 5.), la diſtance *S T* & l'angle *T* demeurant invariables, la diſtance C *T* augmentera néceſſairement. On n'aura donc qu'à augmenter la diſtance racourcie *C T* pour le 4 Septembre. Elle étoit $=0{,}25752$, je la ſuppoſerai donc $=0{,}30752$, pour augmenter aſſés la diſtance au ſoleil.

§. 23. Avec cette nouvelle diſtance $=0{,}30752$, j'en chercherai une ſeconde pour les *obſervations employées ci-deſſus*, conformement aux formules données dans le §. 10. (*Fig.* 15.) Il y avoit, $\text{tang}\,y = \dfrac{\dfrac{yM}{ym} - \dfrac{T+t}{T}}{\dfrac{T+t}{T}\,\text{cót.}\,M - \dfrac{yM}{ym}\,\text{cot.}\,m}$

En ſuite $C\,M = \dfrac{M\,y\,\text{ſin}\,y}{\text{ſin}\,(y+M)}$

Or par les obſervations du 4, 6, 8 Septembre, nous avons trouve. §. 17.

étant $\gamma\,\theta = 0{,}30752$	$\gamma\,\theta = 0{,}30752$	log. $\gamma\,M = 9{,}3435071$
$\theta\,m = 0{,}05681$	$\theta\,M = 0{,}08697$	log. $\gamma\,m = 9{,}3991717$
$m\,\gamma = 0{,}25071$	$M\gamma = 0{,}22055$	$9{,}9443354$
		cos $M = 0{,}7707627$

nombre $5{,}18917 = 0{,}7150981$

$\frac{T+t}{T} = 2{,}00893$

$\frac{\gamma M}{\gamma m} = 0{,}87970$

$- 1{,}12923 =$ numérateur,

$+ 5{,}39800 = \frac{T+t}{T} \cos M$

denom. $0{,}20883$

$-$ log. $1{,}12923 = 0{,}0527828$
log. $0{,}20883 = 9{,}3197929$

$-$ tang $\gamma = 0{,}7329899$

ſin $\gamma = 9{,}9926980$
$\gamma\,M = 9{,}3435071$

$- 9{,}3362051$

donc $\gamma = 100^\circ\, 28'\, 39''$
$M = 20^\circ\, 24'\, 48''$

$\gamma + M$ $120^\circ\, 53'\, 27''$

ſin $(\gamma + M) = 9{,}9335715$

log. $C\,M = 9{,}4026336$
donc $C\,M = 0{,}25272$
$M\,T = 0{,}01905$

diſtance $C\ T$ pour 8 Septembre $= C\,T = 0{,}27177$

On cherchera de la même façon la diſtance pour l'obſervation du douze Septembre, moyennant les obſervations du 8 & 10, Septembre.

$\gamma\,\theta = 0{,}27177$	$\gamma\,\theta = 0{,}27177$	log. $\gamma\,M = 9{,}1755988$
$M\,\theta = 0{,}12194$	$\gamma\,m = 0{,}09530$	log. $\gamma\,m = 9{,}2466709$
$\gamma\,M = 0{,}14983$	$\gamma\,m = 0{,}17647$	log. $\frac{\gamma\,M}{\gamma\,m} = 9{,}9289279$

$\frac{T+t}{T}$ cot. $M = 4{,}68384$
$4{,}16469$

denom. $= + 0{,}51915$

cot. $M = 0{,}6906546$

$0{,}6195825$

$\frac{T+t}{T} = 2{,}01980$	log. 1,17076 = 0,0684669
$\frac{\gamma M}{\gamma m} = 0{,}84904$	log. 0,51915 = 9,7152929
numérat. = — 1,17076	— tang γ = 0,3531740

sin γ = 9,9610202	γ = 113° 54′ 50″
γM = 9,1755988	M = 23° 19′ 38″
9,1366190	137° 14′ 28″ = $\gamma + M$
sin ($\gamma + M$) = 9,8318150	donc $C\,M$ = 0,20175
	$M\,T$ = 0,06890
log. $C\,M$ = 9,3048040	
	$C\,T$ = 0,27065

est la distance racourcie de la terre à la Comète pour le 12 Septembre.

§. 24. *Avec les deux distances racourcies* 0,30752 & 0,27065, je cherche les distances au soleil, les latitudes héliocentriques, le temps dans lequel l'aire MSN est décrite, &c. conformement aux §. §. 19—21. je n'en donnerai que les résultats.

4 Sept. 13h 11′ 52″	12 Sept. 14h 47′ 19″	(*Fig.* 16.)
$C\,T$ = 0,30752	$C\,T$ = 0,27065	
log. de la vraie distance ou log. $C\,S$ = 0,0063312	log. $C\,S$ = 9,9284304	
S = 17° 32′ 53″	S = 13° 25′ 40″	
h = 5° 35′ 34″	H = 8° 4′ 54″	
$\lambda\,V$ = 0s 0° 12′ 49″	$L\,V$ = 0s 3° 56′ 43″	

$L\lambda$ = 3° 43′ 54″. Lieu du noeud = 11s 21° 57′ 7″, $C\,c$ = 4° 29′ 25″, inclinaison = 34° 16′ 25″. Anomalie $A\,S\,N$ = 135° 3′ 2″, $A\,S\,M$ = 130° 33′ 38″, log. $A\,S$ = 9,1710840, temps du secteur $M\,S\,N$ = 7,252 Jours.

temps observé = 8,066

différence = 0,814 jours.

La différence entre le calcul & l'observation ne laisse pas encore d'être considérable, quoique la distance vraie de la première supposition ait été assès augmentée, car elle étoit d'abord = 1,00723, & ensuite elle a été = 1,01539. Pour employer avec plus de succès la méthode de correction, que nous *allons* détailler, on devroit encore refaire la calcul, supposant une distance un peu plus grande que la racourcie du 4 Septembre prise en dernier lieu, afin d'établir une orbite, qui ap-

proche d'avantage du vrai. Mais enfin pour mettre à l'épreuve, la méthôde que nous allons exposer, nous l'appliquerons à une orbite dont les élémens paroissent encore peu corrects.

ARTICLE CINQUIEME ET SIXIEME.

§. 25. Les élémens de l'orbite Parabolique trouvés par les articles précédens étant encore *éloignés du vrai*, il s'agit de les déterminer plus exactement. Il s'agiroit donc d'établir une méthode *de correction moyennant la* quelle l'on pourroit corriger à la fois, les cinq élémens, autant que l'hypothêse Parabolique le permet.

Pour qu'une *telle méthode soit expeditive*, l'on *devroit supposer* comme à peu près connus, le moindre nombre d'élémens; & par *leur secours à l'aide des changemens* qu'on y feroit, on corrigeroit les autres élémens soit pour diminuer autant qu'il seroit possible, le nombre des inconnus, soit pour abréger les calculs. Or l'on ne sauroit guéres *employer* moins de deux élémens, ou moins de deux inconnues. Il se présente donc d'abord un problême intéressant à résoudre. *Choisir deux élémens de l'orbite parmi les cinq, dont l'on pourroit déduire les trois autres, le lieu de la Comète étant donné.*

En Combinant les élémens deux à deux je n'ai trouvé que le *lieu du noeud* & *l'inclinaison de l'orbite* qui fournissent la solution de la question. J'ai fait sur tout plusieurs recherches, si l'on ne pourroit déduire de la distance périhélie & du passage par le périhélie les autres trois élémens. Ce seroient les élémens dont l'exactitude importeroit le plus. On en déduiroit facilement les *distances*, les anomalies: mais je ne vois pas de moyen d'en déduire aussi le noeud, l'inclinaison, le lieu du périhélie; le lieu géoceutrique de la Comète étant d'ailleurs donné. J'ai donc dû revenir à l'inclinaison & au noeud.

M. *Euler* a déjà fait usage de ces deux élémens, presque dans la même vue. Cependant j'ose dire que j'en rendrai l'usage plus étendu. Pour voir en quoi je me pourrois rencontrer avec M. *Euler*; j'exposerai en peu de mots nos procédes. Il semble que M. *Euler* n'a employé la méthôde de correction fondée sur les deux élémens mentionnés, que lors qu'ils sont deja assés exacts, si bien qu'on devra ne la retou-

cher que très peu. Celà paroit fur tout *dans les recherches* fur la Comète de 1769, où l'illuftre Géomètre a employé ces deux élémens qui etoient exacts à dix ou vingt minutes près, page 119. & de même page 157, dans la *theoria Cometarum.* C'eft pourquoi M. *Euler* pouvoit être affuré que les autres élémens feroint auffi affès exacts. En fuppofant donc l'inclinaifon & le lieu du noeud, l'on calcule pour trois obfervations données, les diftances au foleil, le parametre, la diftance périhélie, le pasfage par le périhélie & le lieu du périhélie. L'on fait enfuite deux Hypothêfes, que l'on calcule auffi fur les trois obfervations. L'on introduit deux inconnues pour déterminer les corrections de l'inclinaifon & du noeud. De ces deux inconnues dépendent auffi les corrections des autres élémens: en forte que chaque obfervation fournira un élément affecté de deux inconnues. Pour les déterminer *M. Euler* égale entre eux les trois paffages par le périhélie, *affectés* des deux inconnues, & déduits des trois obfervations, d'où fe dérivent les deux inconnues, & par conféquent les corrections des élémens. *Celà fe peut bien faire*, lorsque les deux élémens *fuppofés font dejà affès exacts*, & que par conféquent les temps du périhélie différent a peu d'heures entr' eux, comme en effet ils s'écartent à peine trois heures les uns des autres dans le calcul cité. *Mais comme le temps du périhélie ne détermine pas tellement l'orbite*, qu'ils pourroient même paffer plufieurs Comètes dans le même temps par leurs périhélies, & décriroient des orbites très différentes; cette méthôde *porteroit* néceffairement à faux fi on l'appliquoit à des élémens peu corrects. C'eft pourqnoi j'ai du prendre une autre route, pour trouver des corrections appliquables à des élémens peu exacts.

§. 26. J'établis auffi trois fuppofitions femblables à celles de M. *Euler*. Dans cette vue, je prens l'inclinaifon & le lieu du noeud tels qu'ilfont réfulté de l'orbite, qui approchoit le plus les calculs des obfervations. C'eft dans notre cas celle qui a été fupputée dans le §. 24. Les tems calculés & obfervés ne différoient que $\frac{2}{5}$ d'un jour, mais dans l'autre l'erreur montoit à $1\frac{7}{10}$ d'un jour. Parce que l'inclinaifon & la longitude du noeud ont augmenté pour l'orbite plus exacte, je foupçonne que ces deux élémens ont encore befoin d'être augmentés. Voilà pourquoi je ne me fuis pas borné aux calculs du troifième article mais que je les ai refaits dans le quatrième, afin d'être certain, fi les deux élémens principaux devoiént être augmentés ou diminués pour établir nos Hypothêfes. C'eft pourquoi je les ai augmentés d'un degré. Ayant déduit de chaque obfervation les diftances vrayes au foleil & les éloignemens au noeud felon les trois Hypothéfes; je calcule felon les formules

§. §. 20. & 21. les temps des secteurs, les quels étant comparés aux temps observés, il en résulte trois équations pour déterminer les deux inconnues. Combinant ces équations deux à deux, j'en tire de trois manieres les valeurs des inconnues. Si les trois valeurs ainsi déterminées pour chaque inconnue ne différent pas beaucoup, j'ai lieu de présumer que les corrections ne s'éloignent pas de la vérité. Au reste je prends le milieu d'entre les résultats, rejettant celui, qui s'écarte le plus des deux autres. J'aurois donc de cette façon perfectionné l'inclinaison & le lieu du noeud. Or ces deux élémens étant exacts, il faut que les autres le soient aussi. Il vaudra donc mieux déduire ceux-ci de l'inclinaison & du noeud corrigés, que de leur appliquer les corrections dérivées pour les deux élémens principaux. C'est en quoi je m'écarte aussi de M. *Euler*.

Mais comme ce premier pas ne me conduit pas encore à la détermination de la vraie orbite, je reprends le calcul suivant les conditions que j'exposerai dans le septieme article.

§. 27. Je donnerai d'abord les formules, moyennant les quelles M. *Euler* calcule les distances au soleil. Le plan de la planche représente l'Ecliptique ou se trouve le soleil S, la terre T, la ligne du noeud VSN, & les distances racourcies Sc, Tc. (*Fig.* 11.) Parce qu'on connoit à peu près la situation des élémens de l'orbite, il sera facile de construire la figure d'après vérité. La ligne AMN représente l'orbite parabolique incliné sur le plan de la planche. La Comète est placée en C au dessus de la planche. Abaissant de C la perpendiculaire Cc sur la planche, le point c marquera le lieu réduit à l'écliptique. Tirant les lignes CT, cT, & CS, cS, les angles CTc, CSc, denotent les latitudes géocentriques & héliocentriques. Abaissant des points C & c, les perpendiculaires CI, cI sur la ligne des noeuds, ou sur l'intersection des plans de l'écliptique & de l'orbite, l'angle CIc indique l'inclinaison. Le lieu du soleil ou de la terre, & le lieu du noeud etant donnés, on connoit l'angle TSN, qui égale la différence entre les lieux de la terre & du noeud.

Soit $TSN = p$. L'angle STc ou l'élongation du soleil à la terre $= T$, & la distance de la terre au soleil ou $ST = b$, étant connus, le triangle STO, fournira $TO = \frac{b}{\sin(T+p)} \times \sin p$, & $SO = \frac{b}{\sin(T+p)} \times \sin T$.

Soit

Soit $o\,c = Z$, à cauſe de $I\,o\,c = T + p$, il y aura $I\,c = Z \sin(p + T)$ & $I\,o = Z \cos(p + T)$. Or $S\,I = S\,o - I\,o$, ſi $p + T < 90°$, & $S\,I = S\,o + I\,o$, ſi $p + T > 90°$. Soit l'angle d'inclinaiſon $C\,I\,c = I$, il y aura $I\,C = \frac{I\,c}{\cos I} = \frac{Z \sin(p + T)}{\cos I}$, donc tang $C\,S\,N = \frac{I\,C}{S\,I} = \frac{I\,C}{S\,o \pm I\,o}$; & enfin $S\,C = \frac{S\,I}{\sin CSN}$.

Pour éliminer l'inconnue Z, il faut conſidérer que $C\,c = T\,c \times$ tang $G = I\,c \times$ tang I, poſant G = latitude géocentrique, donc $\left\{ \frac{b \sin p}{\sin(T + p)} + Z \right\}$ tang $G = Z$ tang $I \sin(p + T)$, d'où réſulte $Z = \frac{b \sin p}{\sin(T + p)} : \left\{ \frac{\text{tang } I \sin(p + T)}{\text{tang } G} - 1 \right\}$, où poſant $\frac{\text{tang } I \sin(p + T)}{\text{tang } G} = n$, il y aura $Z = \frac{b \sin p}{(n - 1) \sin(T + p)}$. Ayant trouvé Z, il faudra 2) déterminer $S\,o = \frac{b}{\sin(T + p)} \times \sin T$ & 3) $I\,o = Z \cos(p + T)$ & 4) $S\,o\,I = S\,o \pm I\,o$ & 5) $I\,C = \frac{Z \sin(p + T)}{\cos I}$ & 6) tang $C\,S\,N = \frac{I\,C}{S\,I}$ & en dernier lieu $S\,C = \frac{S\,I}{\sin C\,S\,N}$.

§. 28. Outre les deux obſervations dont nous avons fait uſage, nous employerons celle du 23 Aout 12h 17′ 1″. Nous avons trouvé le lieu du noeud en 11ˢ 21° 57′ 7″, & l'inclinaiſon = 34° 16′ 25″. Avec ces deux élémens je cherche les diſtances de la Comète au ſoleil & l'éloignement au noeud ou l'angle $C\,S\,N$, pour les trois obſervations. Puis j'établis encore deux Hypothêſes pour chaque obſervation. Dans la première je ſuppoſe le lieu du noeud dans 11ˢ 22° 57′ 7″ & dans l'autre, l'inclinaiſon = 35° 16′ 25″. Je commence par l'obſervation du 23 d'Août.

Le Lieu du ſoleil = 5ˢ 1° 0′ 22″ diſtance de la terre au ſoleil

Lieu geoc. de la Comète = 1ˢ 19° 43 15 ou log. b = 0,0043960

T = 101° 17′ 7″, latit. geoc. G = 6° 58′ 19″

Noeud = $11^s\,21°\,57'\,7''$ L. de ♀ = $11^s\,1°\,0'\,22''$	Premiere Hypothêse $11^s\,22°\,57'\,7''$ Noeud $11^s\,1°\,0'\,22''$	Seconde Hypothêse Noeud $11^s\,21°\,57'\,7''$ $11^s\,1°\,0'\,22''$
$p = 20°\,56'\,45''$ $T = 101°\,17'\,7''$	$21°\,56'\,45'' = p$ $101°\,17'\,7'' = T$	$p = 20°\,56'\,45''$ $T = 101°\,17'\,7''$
$p+T = 122°\,13'\,52''$ $I = 34°\,16'\,25''$ sin $p+T$ = 9,9273210 tang I = 9,8334525	$123°\,13'\,52'' = p+T = SoI$ $I = 34°\,16'\,25''$ 9,9224489 9,8334524	$p+T = 122°\,13'\,52''$ $I = 35°\,16'\,25''$ 9,9273210 9,8496337
9,7607735 9,7607735 tang G = 9,0873823	9,7559014 9,7559014 9,0873823	9,7769547 9,7769547 9,0873823
log. n = 0,6733912 $n-1$ = 3,71402 log. b = 0,0043960 sin $T+p$ = 9,9273210	0,6685191 $n-1$ = 3,66143 log. b = 0,0043960 9,9224489	0,6895724 $n-1$ = 3,89297 log. b = 0,0043960 9,9273210
$L\,\dfrac{b}{\sin(T+p)}$ = 0,0770750 sin p = 9,5532581	0,0819471 sin p = 9,5725578	$L\,\dfrac{b}{\sin(T+p)}$ = 0,0770750 9,5532581
To = 9,6303331 log. $n-1$ = 0,5698443	$T\,o$ = 9,6545049 $n-1$ = 0,5636007	9,6303331 $n-1$ = 9,5902810
log. Z = 9,0604888 cos $p+T$ = 9,7270006	Z = 9,0909042 = 9,7387944	Z = 9,0400521 = 9,7270006
log $I\,o$ = 8,7874894 $L\,\dfrac{b}{\sin T+p}$ = 0,0770750 sin T = 9,9915206	$I\,o$ = 8,8296986 = 0,0819471 = 9,9915206	$I\,o$ = 8,7670527 = 0,0770750 = 9,9915206
log. $S\,o$ = 0,0685956 $S\,o$ = 1,17110 $I\,o$ = 0,06130 +	0,0734677 $S\,o$ = 1,18432 $I\,o$ = 0,06756 +	log. $S\,o$ = 0,0685956 $S\,o$ = 1,17110 $I\,o$ = 0,05848

$SI = 1{,}23240$	$SI = 1{,}25188$	$SI = 1{,}22958$
log. $Z = 9{,}0604888$	log. $Z = 9{,}0909042$	log. $Z = 9{,}0400521$
sin$(p+T) = 9{,}9273210$	$= 9{,}9224486$	$= 9{,}9273210$
$8{,}9878098$	$9{,}0133531$	$8{,}9673731$
cos $I = 9{,}9171681$	cos $I = 9{,}9171681$	cos $I = 9{,}9119050$
$IM = 9{,}0706417$	$IM = 9{,}0961850$	$IM = 9{,}0554681$
log. $SI = 0{,}0907517$	log. $SI = 0{,}0975641$	log. $SI = 0{,}0897568$
l. tang $NSC = 8{,}9798900$	tang $NSC = 8{,}0986209$	tang $NSC = 8{,}9657113$
$NSC = 5°27'14''$	$NSC = 5°41'33''$	$NSC = 5°16'53''$
$IM = 9{,}0706417$	$IM = 9{,}0961850$	$9{,}0554681$
sin $NSC = 8{,}9779274$	sin $NSC = 8{,}9964656$	$8{,}9640000$
log. $SC = 0{,}0927143$	log. $SC = 0{,}0997194$	log. $SC = 0{,}0914681$

§. 29. La ſeconde obſervation eſt pour le 4 Septembre 13ʰ 11′ 52″. Nous en avons fait uſage §. 19.

	Premiere ſuppoſit.	Seconde ſuppoſition
Noeud $= 11^s 21° 57' 7''$	Noeud $= 11^s 22° 57' 7''$	Noeud $11^s 21° 57' 7''$
Lieu de ♀ $= 11^s 12° 39' 56''$	Lieu de ♀ $= 11^s 12° 39' 56''$	Lieu de ♀ $11^s 12° 39' 56''$
$p = 9° 17' 11''$	$p = 10° 17' 11''$	$p = 9° 17' 11''$
$T = 81° 52' 37''$	$T = 81° 52' 37''$	$T = 81° 52' 37''$
$p+T = 91° 9' 48''$	$p+T = 92° 9' 48''$	$p+T = 91° 9' 48''$
sin$(p+T) = 9{,}9999104$	sin $p+T = 9{,}9996903$	$9{,}9999104$
tang $I = 9{,}8334525$	tang $I = 9{,}8334525$	tang $I = 9{,}8496337$
$9{,}8333629$	$9{,}8331428$	$9{,}8495441$
tang $G = 9{,}5072074$	$9{,}5072074$	$9{,}5072074$
log. $n = 0{,}3261555$	log. $n = 0{,}3259354$	log. $n = 0{,}3423367$
$n - 1 = 1{,}11912$	$n - 1 = 1{,}11805$	$n - 1 = 1{,}19957$
log. $b = 0{,}0031279$	$0{,}0031279$	$0{,}0031279$
sin $T+p = 9{,}9999104$	sin $T+p = 9{,}9996903$	$9{,}9999104$
log $\frac{b}{\sin(T+p)} = 0{,}0032175$	log. $\frac{b}{\sin(T+p)} = 0{,}0034376$	$= 0{,}0032175$
sin $p = 9{,}2078211$	sin $p = 9{,}2518048$	$9{,}2078211$
log. $To = 9{,}2110386$	log. $To = 9{,}2552424$	log. $To = 9{,}2110386$
log. $n - 1 = 0{,}0488769$	log. $n - 1 = 0{,}0484618$	log. $n - 1 = 0{,}0790251$

$\log. Z = 9,1621617$	$\log. Z = 9,2067806$	$\log. Z = 9,1320135$
$\cos(p+T) = 8,3075517$	$\cos p+T = 8,5768974$	$8,3075517$
$\log. IO = 7,4697134$	$\log. IO = 7,7836780$	$\log. IO = 7,4395652$
$\frac{b}{\sin(T+p)} = 0,0032175$	$\frac{b}{\sin(T+p)} = 0,0034376$	$0,0032175$
$\sin T = 9,9956212$	$= 9,9956212$	$9,9956212$
$\log. SO = 0,9988387$	$\log. SI = 9,9990588$	$\log. SO = 9,9988387$
$SO = 0,99733$	$SO = 0,99783$	$SO = 0,99733$
$IO = 0,00294 +$	$IO = 0,00607$	$IO = 0,00275$
$SI = 1,00027$	$SO = 1,00390$	$SI = 1,00008$
$\log. Z = 9,1621617$	$\log. Z = 9,2067805$	$\log. Z = 9,1320130$
$\sin(p+T) = 9,9999104$	$9,9996904$	$9,9999104$
$9,1620721$	$9,2064709$	$9,1319234$
$\cos I = 9,9171681$	$9,9171681$	$9,9119050$
$\log. IM = 9,2449040$	$IM = 9,2893028$	$IM = 9,2200184$
$\log. SI = 0,0000172$	$\log. SI = 0,0016904$	$0,0000347$
$\text{tang } NSL = 9,2448868$	$\text{tang } NSL' = 9,2876124$	$\text{tang } NSL'' = 9,2199837$
$NSL = 9°58'4''$	$NSL' = 10°58'28''$	$NSL'' = 9°25'21''$
$\log. IM = 9,2449040$	$IM = 9,2893028$	$IM = 9,2200184$
$\sin NSL = 9,2382829$	$\sin NSL' = 9,2796012$	$\sin NSL'' = 9,2140841$
$\log. SL = 0,0066211$	$\log. SL' = 0,0097016$	$\log. SL'' = 0,0059343$

§. 30. Enfin je vais traiter par un ſemblable calcul l'obſervation du 12 Septembre $14^h 47' 19''$ dont j'ai expoſé les circonſtances dans le §. 17.

	Premiere ſuppoſition	Seconde Suppoſition
Noeud $= 11^s 21° 57' 7''$	Noeud $= 11^s 22° 57' 7''$	Noeud $= 11^s 21° 75' 7''$
Lieu de ♀ $= 11^s 20° 31' 3''$	$= 11^s 20° 31' 3''$	$11^s 20° 31' 3''$
$p = 1° 26' 4''$	$p = 2° 26' 4''$	$p = 1° 26' 4''$
$T = 45° 59' 18''$	$T = 45° 59' 18''$	$T = 45° 59' 18''$
$p+T = 47° 25' 22''$	$p+T = 48° 25' 22''$	$p+T = 47° 25' 22''$
$\sin p+T = 9,8670937$	$\sin p+T = 9,8739875$	$\sin(p+T) = 9,8670937$
$\text{tang } I = 9,8334525$	$\text{tang } I = 9,8334525$	$\text{tang } I = 9,8496337$
$9,7005462$	$9,7073900$	$9,7167274$
$\text{tang } G = 9,6432232$	$9,6432232$	$9,6432232$

log. n = 0,0573230	log. n = 0,0641668	log. n = 0,0735042
n — 1 = 0,14110	n — 1 = 0,15922	n — 1 = 0,18441
log. b = 0,0021900	0,0021900	0,0021900
ſin (p + T) = 9,8670937	= 9,8739375	9,8670937
log b / ſin (p + T) = 0,1350963	b / ſin (T + p) = 0,1282525	b / ſin (p + T) = 0,1350963
ſin p = 8,3985161	ſin p = 8,6281464	ſin p = 8,3985161
log. To = 8,5336124	log. To = 8,7563989	log. To = 9,5336124
log. n — 1 = 9,1495270	log. n — 1 = 9,2019976	log. n — 1 = 9,2657845
log. Z = 9,3840854	log. Z = 9,5544013	log. Z = 9,2678279
cos (p + T) = 9,8303213	cos p + T = 9,8219254	cos (p + T) = 9,8303213
log. Io = 9,2144067	log. Io = 9,3763267	log. Io = 9,0981492
log. b / ſin (T + p) = 0,1350963	log. b / ſin (T + p) = 0,1282525	log. b / ſin (T + p) = 0,1350963
ſin T = 9,8568487	ſin T = 9,8568487	ſin T = 9,8568487
log. So = 9,9919450	log. So = 9,9851012	log. So = 9,9919450
So = 0,98163	So = 0,96628	So = 0,98162
Io = 0,16382 —	Io = 0,23786 —	Io = 0,12536 —
SI = 0,81781	SI = 0,72842	SI = 0,85626
log. Z = 9,3840854	log. Z = 9,5544013	log. Z = 9,2678279
ſin (p + T) = 9,8670927	ſin (p + T) = 9,8739375	ſin (p + T) = 9,8670927
9,2511781	9,4283388	9,1349206
cos I = 9,9171681	9,9171681	9,9119050
log. IC = 9,3339900	IC = 9,5111707	IC = 9,2230156
log. SI = 9,9126471	SI = 9,8623819	SI = 9,9326057
tang NSM = 9,4213429	tang NSM′ = 9,6487888	tang NSM″ = 9,2904099
NSM = 14° 46′ 50″	NSM′ = 24° 0′ 36″	NSM″ = 11° 2′ 37″
log. IM = 9,3339900	IM′ = 9,5111707	IM′ = 9,2240156
ſin NSM = 9,4067405	ſin NSM′ = 9,6094742	ſin NSM″ = 9,2822961
log. SM = 9,9272495	log. SM′ = 9,9016965	log. SM″ = 9,9417195

§. 31. Après avoir déterminé les diſtances au ſoleil & les *éloignemens* de la Comète au noeud nous déterminerons le temps dans *lequel* chaque ſecteur, relativement à chaque Hypothêſe, a été parcouru ſelon les §§. 18.

Pour l'orbite parabolique de la premiere obſervation §. 28, il y avoit l'angle $NSC = 5° 27' 14''$ & pour la ſeconde obſervation, l'angle $NSL = 9° 58' 4''$ donc l'angle compris $CSL = 4° 30' 50'' = \phi$. Donc $\frac{CSL}{4} = a = 1° 7' 42''\frac{1}{2}$. Les logarithmes des rayons vecteurs étoient, ſavoir log. $SC =$ 0,0927143, & log. $SL =$ 0,0066211.

De la même façon l'on combinera les diſtances au ſoleil & les angles compris par rapport aux ſuppoſitions premieres & ſecondes, pour la premiere & ſeconde obſervation.

	Pour les premieres ſuppoſ.	Pour les ſecondes ſuppoſ.
II. Obſ. $NSL = 9° 57' 56''$	II. Obſerv. $10° 58' 28''$	II. Obſerv. $9° 25' 21$
I. Obſ. $NSC = 5° 27' 14''$	I. Obſerv. $5° 41' 33''$	I. Obſerv. $5° 16' 47'$
$4a = LSC = 4° 30' 42''$	$4a = 5° 16' 55''$	$4a = 4° 8' 34''$
$a = 1° 7' 40''\frac{1}{2}$	$a = 1° 19' 14''$	$a = 1° 2' 8\frac{1}{2}''$
log. $SC =$ 0,0927143	— 0,0997194	— 0,0915948
log. $SL =$ 0,0067411	— 0,0097016	— 0,0059343
L tang $\alpha =$ 0,0859732	L tang $\alpha =$ 0,0900178	L tang $\alpha =$ 0,0856605
$L\sqrt{}$ tang $\alpha =$ 0,0429866	$L\sqrt{}$ tang $\alpha =$ 0,0450089	$L\sqrt{}$ tang $\alpha =$ 0,0428302
ou log. tang $(\theta + 45°)$		
$\theta = 2° 49' 51''$	$\theta = 2° 47' 59''$	$\theta = 2° 49' 15''$
tang $\theta =$ 8,6941876	tang $\theta =$ 9,6893382	tang $\theta =$ 8,6916061
tang $a =$ 8,2941229	tang $a =$ 8,3627113	tang $a =$ 8,2569106
tang $x =$ 0,4000647	tang $x =$ 0,3266269	tang $x =$ 0,4356955
$2x = 136° 35' 24''$	$2x = 129° 31' 24''$	$2x = 139° 43' 30''$
$2a = 2° 15' 21''$	$2a = 2° 38' 28''$	$2a = 2° 4' 17''$
$ASC = 138° 50' 45'' +$	$ASC' = 132° 9' 52''$	$ASC'' = 141° 47'' 47'' +$
$ASL = 134° 20' 3'' -$	$ASL' = 126° 52' 56''$	$ASL'' = 137° 39' 13'' -$
t. de l'an. $ASC =$ 736,93 j.	temps de l'an. = 499,33 j.	temps de l'an. = 897,12 j.
—— l'an. $ASL =$ 562,41	—— —— —— = 383,84 j.	—— —— —— = 683,86
$\theta - T =$ 174,52, jours	$\theta - T =$ 115,49 jours	$\theta - T =$ 213,26 j.
log. $SC =$ 0,0927143	log. $SC' =$ 0,0997194	log. $SC'' =$ 0,0915941
$\cos\left\{\frac{ASC}{2}\right\}^2 = 9{,}0917754$	$\cos\left\{\frac{ASC'}{2}\right\}^2 = 9{,}2158216$	$\cos\left\{\frac{ASC''}{2}\right\}^2 = 9{,}0297598$

log. p = 9,1844897	log. p = 9,3155410	log. p = 9,1213539
log. p^3 = 17,5534691	log. p^3 = 17,9466230	log. p^3 = 17,3640617
log. $\sqrt{p^3}$ = 8,7767345	log. $\sqrt{p^3}$ = 8,9733115	log. $\sqrt{p^3}$ = 8,6820308
log. $\theta - T$ = 2,2418452	log. $\theta - T$ = 2,0614148	log. $\theta - T$ = 2,3289094
1,0185797	1,0347263	1,0109402
temps du secteur $C\ S\ L$	temps du secteur $C'\ S\ L'$	temps du secteur $C''\ S\ L''$
ou 10,437 = m	ou 10,832 = m'	ou 10,255 = m''

Or le temps écoulé = 12,038 jours = M. Donc la différence entre le temps observé & calculé sur l'orbite parabolique = $M - m$ = 1,600 jours. Mais l'augmentation d'un degré pour le lieu du noeud a produit la variation du temps = $m' - m$ = 0,395 jo. & celle pour l'inclinaison a produit une variation = $m'' - m$ = $-$ 0,182. Partant l'erreur $M - m$ est à considérer comme une fonction des corrections x & y qu'il faudra appliquer au lieu du noeud & à l'inclinaison. Mais ces corrections dépendent des variations x & y, si donc l'orbite parabolique sur la quelle nous avons établi les deux hypothêses, ne s'éloigne pas trop de la véritable, on peut supposer que les variations dans les temps sont comme les corrections. Parcenséquent, la correction d'un degré pour le noeud : à la correction x = la variation $m' - m$: à la variation que doit effectuer la vraye correction du noeud; cette variation par rapport au noeud sera donc = $(m' - m)\,\frac{x}{1^\circ} = (m' - m)\,x$; elle sera pour l'inclinaison = $(m'' - m)\,y$, donc $M - m = (m' - m)\,x + (m'' - m)\,y$, & partant pour notre cas l'équation I, ou 1,600 = 0,395 x $-$ 0,182 y.

§. 32. Pour déterminer les inconnues x & y, je calculerai, comme il vient d'être fait, le temps du secteur, compris entre la premiere & la troisieme observation.

III. Obs. NSM = 14°46′50″	$N\ S\ M'$ = 24° 0′ 36″	$N\ S\ M''$ = 11° 4′ 57″
I. Obs. NSC = 5°27′14″	$N\ S\ C'$ = 5° 41′ 33″	$N\ S\ C'$ = 5° 16′ 47″
$4a$ = 9° 19′ 36″	$4\ a$ = 18° 19′ 3″	$4a$ = 5° 47′ 18″
a = 2° 19′ 54″	a = 4° 34′ 26″	a = 1° 26′ 49″
log. $S\ C$ = 0,0927143	log. $S\ C'$ = 0,0997194	log. $S\ C''$ = 0,0915948
log. $S\ M$ = 9,9272495	log. $S\ M'$ = 9,9016965	log. $S\ M''$ = 9,9407715

$\text{tang}\ \alpha = 0,1654648$	$\text{tang}\ \alpha = 0,1980229$	$\text{tang}\ \alpha = 0,1508233$
$L\sqrt{\text{tang}\ \alpha} = 0,0827324$ ou *log. tang* $(\theta + 45°)$	$L\sqrt{\text{tang}\ \alpha} = 0,0990114$	$L\sqrt{\text{tang}\ \alpha} = 0,0754116$
donc $\theta = 5°25'30''$	$\theta = 6°28'31''$	$\theta = 4°57'$
$\text{tang}\ \theta = 8,9775777$	$\text{tang}\ \theta = 9,0549900$	$\text{tang}\ \theta = 8,9375650$
$\text{tang}\ a = 8,6097780$	$\text{tang}\ a = 8,9030872$	$\text{tang}\ a = 8,4024217$
$\text{tang}\ x = 0,3677997$	$\text{tang}\ x = 0,1519028$	$\text{tang}\ x = 0,5351433$
$2x = 133°35'10''$	$2x = 109°38'28''$	$2x = 147°28'56''$
$2a = 4°39'48''$	$2a = 9°8'52''$	$2a = 2°53'38''$
$ASM = 138°14'58''$	$ASM' = 118°47'20''$	$ASM'' = 150°22'34''$
$ASC = 128°55'22''$	$ASC' = 100°29'36''$	$ASC'' = 144°35'18''$
t. de l'an. $ASC = 709,85$ jo.	$ASC' = 271,63$ j.	$ASC'' = 1791$ jours
— — $ASM = 423,34$	$ASM' = 146,43$	$ASM'' = 1100$
$\theta - T = 286,51$	$\theta - T = 125,29$	$\theta - T = 691$
$\log. SC = 0,0927143$	$\log. SC' = 0,0997194$	$\log. SC'' = 0,0914948$
$\left\{\cos \frac{ASC}{2}\right\}^2 = 9,1037776$	$\left\{\cos \frac{ASC'}{2}\right\}^2 = 9,4136480$	$\left\{\cos \frac{ASC''}{2}\right\}^2 = 8,8152820$
$\log. p = 9,1964919$	$\log. p = 9,5133680$	$\log. p = 8,9067768$
$\log. p^3 = 17,5894757$	$\log. p^3 = 18,5401040$	$\log. p^3 = 16,7203283$
$\log. \sqrt{p^3} = 8,7947378$	$\log. \sqrt{p^3} = 9,2700520$	$\log \sqrt{p^3} = 8,3601642$
$\log. \theta - T = 2,4571398$	$\log. \theta - T = 2,0976043$	$\log. \theta - T = 2,8394770$
$1,2518776$	$1,3676563$	$1,1996412$
temps du secteur CSL ou $17,859 = m$	temps du secteur CSL' ou $23,297 = m'$	temps du secteur CSL'' ou $15,83 = m''$

Or le temps écoulé entre la premiere & la troisieme observation est de 20,104 jours $= M$, donc $M - m = 2,245$, & $m' - m = 5,438$ & $m'' - m = -2,023$. D'où résulte l'équation II. ou $2,245 = 5,438\ x - 2,023\ y$.

§. 33. De la combinaison des équations I. & II. résultent les équations $\frac{1600}{395} + \frac{182}{395}\ y = x$ & $\frac{2245}{5438} + \frac{2026}{5438}\ y = x$. On fera bien de se servir des logarithmes pour exprimer les coëfficiens en dcimales

log. 2245 = 3,3512163	log. 1600 = 3,2041200
log. 5438 = 3,7354392	log. 395 = 2,5965971
9,6157771	0,6075229
nombre = 0,41282	nombre = 4,05065

log. 2023 = 3,3059959	log. 182 = 2,2790713
log. 5438 = 3,7354392	log. 395 = 2,5965977
9,5705567	9,6634742
nombre = 0,37201	nombre = 0,46076

L'on aura donc l'équation III. ou $4,05065 + 0,46076\ y = x$ & l'équation IV. ou $6,41283 + 0,37201\ y = x$, d'ou l'on tire $360727 + 92434\ y = 0$, d'ou résultent $y = -39°$ & $x = -13°$.

§. 34. *Pour s'assurer de la validité des corrections*, nous les apprecierons par une troisieme équation, qui servira comme de pierre de touche, dans cette méthode.

Les secteurs *L S M* compris entre la seconde & troisieme observation nous fournissent une troisieme équation.

	Premieres suppositions	Secondes suppositions
III. Obs. $NSM = 14°46'50''$	$NSM' = 24°\ 0'36''$	$NSM'' = 11°\ 4'35''$
II. Obs. $NSL = 9°57'56''$	$NSL' = 10°58'28''$	$NSL'' = 9°25'21''$
$4a = 4°52'54''$	$4a = 12°\ 2'18''$	$4a = 1°38'44''$
$a = 1°13'13''$	$a = 3°15'32''$	$a = 0°24'41''$
log. $SC = 0,0067411$	log $SC' = 0,0097116$	log. $SC'' = 9,9059343$
log. $SM = 9,9272495$	log. $SM' = 9,9016965$	log. $SM'' = 9,9407745$
tang $\alpha = 0,0794916$	tang $\alpha = 0,1080151$	tang $\alpha = 0,0651628$
$\sqrt{}$ tang $\alpha = 0,0397458$ ou tang $(\theta + 45°)$	$\sqrt{}$ tang $\alpha = 0,0540075$	$\sqrt{}$ tang $\alpha = 0,0325814$
$\theta = 2°37'5''$	$\theta = 3°33'12''$	$\theta = 2°8'30''$
tang $\theta = 8,6601583$	tang $\theta = 8,7930705$	tang $\theta = 8,5739577$
tang $a = 8,3281350$	tang $a = 8,7554154$	tang $a = 7,8561262$
tang $x = 0,3320233$	tang $x = 0,0376551$	tang $x = 0,7178315$
$2x = 130°4'14''$	$2x = 94°56'41''$	$2x = 158°19'6''$
$2a = 2°26'27''$	$2a = 6°31'4''$	$2x = 49'22''$
$ASM = 132°30'41''$	$ASM' = 101°27'45''$	$ASM'' = 159°8'28''$
$ASL = 127°37'47''$	$ASL' = 88°25'37''$	$ASL'' = 157°29'44''$
t. de l'an. $ASM = 508,91$ jo.	$ASM' = 150,70$ jours	$ASM'' = 4889,7$ jo.
——— $ASL = 397,65$	$ASL' = 105,22$	$ASL'' = 3894,6$
$\theta - T = 111,25$	$\theta - T = 45,48$	$\theta - T = 995,1$
log. $SC = 0,0067411$	log. $SC' = 0,0097116$	log. $SC'' = 0,0059343$
$\left\{\cos\frac{ASm}{2}\right\}^2 = 9,2098726$	$\left\{\cos\frac{ASm'}{2}\right\}^2 = 9,6027172$	$(\cos ASm'') = 8,5154518$

log. p = 9,2166137	log. p = 9,6124188	log. p = 8,5213861
log. p^3 = 17,6498411	log. p^3 = 18,8372564	log. p^3 = 15,5641583
$\sqrt{p^3}$ = 8,8249205	$\sqrt{p^3}$ = 9,4186282	$\sqrt{p^3}$ = 7,7820792
log. $\theta - T$ = 2,0463009	log. $\theta - T$ = 1,6577250	$\theta - T$ = 2,9978667
0,8712205	1,0765532	0,7799459
temps du Secteur CSM ou 7,434 = m	temps du Secteur CSM' ou 11,927 = m'	temps du Secteur CSM'' ou 6,024 = m''

Or le temps écoulé entre la ſeconde & troiſieme obſervation & de 8,066 jours = M, d'où réſulte l'équation ſuivante $0,632 = 4,493\, x - 1,410\, y$. D'où l'on tire l'équation V, ou $x = 0,14155 + 0,31882\, y$.

§. 35. De la combinaiſon de l'équation V, ou $x = 0,14155 + 0,31882\, y$ & de l'équation III. ou $x = 4,05065 + 0,46076\, y$, réſulte $14194\, y = -390910$; donc $y = -26°,4$, & $x = -8°,124$. Combinons enfin l'équation V ou $x = 0,14155$. $0,31882\, y$ avec l'équation IV. ou $x = 0,41283 + 0,37120\, y$.

Il en réſulte $27128 = -5319\, y$, donc $y = 5°,07$ & $x = 1°,41$. Voila des réſultats bien différens pour les inconnues. Cette difficulté mérite d'etre ſcrupuleuſement diſcutée.

§. 39. En jettant un coup d'oeil ſur les variations que les augmentations de l'inclinaiſon & de la longitude du noeud, ont produites dans les diſtances de la Comète au noeud ou dans les angles NSC, NSL, NSM; l'on s'appercevra d'une variation énorme dans la premiere hypothêſe de la troiſieme obſervation §. 30. L'angle $N'SM'$ eſt devenu = 24° 0′ 39″, par l'augmentation d'un dégré pour le noeud; cependant l'angle NSM n'eſt que de 14° 46′ 58″. Il eſt cependant certain que ces angles ne devroient tout au plus différer que d'un ou de deux dégrés, comme en effet ils ne différent pas d'avantage par rapport aux autres obſervations. D'où peut venir cette grande aberration? Nous l'aurions pu cacher, ſi nous avions voulu être moins ſincéres, ſi nous n'étions pas bien aſſurés de la bonté de nôtre méthôde. Ce défaut ne tombe pas ſur la méthôde, mais ſur l'obſervation du 12 Septembre. Tous phyſiciens & Aſtronomes, qui ne font pas des expériences & des obſervations ſans choix & ſans but, doivent convenir, qu'il faut beaucoup de diſcernement dans les obſervations, pour en déduire des concluſion ſures & exactes. Il y a telles circonſtances, qui accompagnent une expériences, les quelles en rendent l'uſage plus difficile & plus incertain à cauſe d'une colliſion de faits. Ceci a ſur tout lieu dans les méthôdes d'approximations, les quelles s'é-

cartant encore du vrai, ne doivent pas être appliquées à des circonstances, qui pour être discutées, ou être assujetties au calcul, demandroient une connoissance exacte de la chose plutôt qu'une connoissance approchée. Voila précisement notre cas. La terre étant trop proche du noeud dans la troisieme observation, l'angle p ou TSN n'étoit d'abord que de $1^\circ\,26'$. Mais il est devenu presque double savoir de $2^\circ\,46'$, par l'augmentation du noeud dans la premiere hypothêse. Or l'angle p influe beaucoup sur l'angle NSC. Car la quantité principale Z, dépend beaucoup de l'angle p, parceque $Z = \frac{TO}{n-1}$, & que $TO = \frac{b}{\sin(p+T)} \times \sin p$. Or sin p étant devenu presque double dans la premiere hypothêse, les *lignes* TO & Z, doivent être considérablement *augmentées*, *partant aussi la ligne* $IO = Z \cos(p+T)$; donc $SI = SO - IO$, doit beaucoup décroitre. Or tang $NSM' = \frac{Z}{SI \sin(p+T)}$, mais Z augmente & SI diminue beaucoup, il faut donc que l'angle NSM ait considérablement augmenté. Il n'est pas nécessaire d'avertir que l'augmentation de l'angle p dans les quantités sin $(p+T)$ & cos $(p+T)$ ne pourra compenser les résultats qui dépendent de sin p. — Cela suffit donc prouver qu'il ne faut pas emploïer les observations, ou *le lieu de la terre n'est éloigné que d'un ou de deux degrés de celui du noeud.*

Reste à voir quel usage l'on pourra faire des valeurs des inconnues & des corrections. Il paroit par ce qu'il vient d'être dit, que le résultat de la premiere hypothêse de la troisieme observation est vicieux; non pas que la méthôde porte à faux, mais parceque l'observation ne pouvoit être appropriée au calcul. J'appellerai donc défectueuses les équations tirées de la troisieme équation, telles sont les équations IV, & V. Les resultats des hypothéses s'accordent en ceque l'inclinaison de l'orbite demande une correction trois fois plus grande que le lieu du noued. Combinant ensemble les équations III. & IV. & III. & V., il faut nécessairement qu'il en viennent des résultats équivoques parcequ'on a combiné des données défectueuses & des données exactes. Mais en combinant les deux équations défectueuses, savoir les IV. & V^me^, les résultats en seront plus exacts; parceque le défaut tombe sur le coefficient de x, le quel est trop grand dans les deux équations; ce coëfficient sera donc beaucoup diminué par la soustraction des deux équations, en sorte qu'il en résultera une équation où le coëfficient de x approchera plus du vrai. Voilà pour quoi je m'en tiendrai aux corrections dé-

duites des équations IV. & V., savoir $x = + 1^\circ,41$ & $y = + 5^\circ$, & que j'ai pris positivemant. Je m'y crois d'autant plus autorisé, parce qu'il paroit par les calculs des orbites paraboliques, exposées dans les 3 & 4^me^ articles, que la longitude du noeud & l'inclinaison alloient en augmentant, lorsque l'orbite approchoit plus du vrai; il est donc à présumer que les corrections seront additives.

Je ne saurois finir cet article sans remarquer, que quoique l'usage des formules analytiques soit très commode & très propre à la pratique; il ne faut cependant pas s'imaginer qu'il ne demande que de substituer des nombres pour les quantités algebraïques. Ceux qui ne connoissent pas la construction des formules, & sur tout qui ne savent pas distinguer les quantités qui influent le plus sur les résultats, de celles qui y contribuent moins, seront très souvent déroutés. En un mot, il faut un discernement méthaphysique tant pour la formation que pour l'application des formules analytiques. Il s'agit de saisir la dépendance & pour ainsi dire l'harmonie des quantités, qui composent une formule, pour juger de l'exactitude des résultats dans un cas ou dans l'autre. Ceux qui reprochent aux analystes, qu'ils ne sont, que des ouvriers mecaniques de calcul, ne s'y entendent gueres. Il faut peut-être plus de discernement & de circonspection pour l'analyse que pour la synthêse. Le cas que nous venons de détailler, en peut fournir une preuve legère.

ARTICLE SEPTIEME.

§. 40. Aïant repété le calcul selon les élémens plus exacts, dont je viens de faire mention, j'ai trouvé la correction du noeud ou $x = + 1,38 = 1^\circ 21' 48''$ & celle de l'inclinaison ou $y = + 2^\circ,07 = 2^\circ 4' 5''$. Partant pour l'orbite corrigé, la longitude du noeud sera $= 11^s\ 23^\circ\ 22'\ 49'' + 1^\circ\ 21'\ 48'' = 11^s\ 24^\circ\ 44'\ 37''$ & l'inclinaison $= 39^\circ\ 16'\ 25'' + 2^\circ\ 4'\ 5'' = 41^\circ\ 20'\ 30''$. Pour établir nos deux hypothêses, il ne nous sera pas permis de supposer des augmentations d'un degré au noeud & à l'inclinaison. Nous avons lieu de soupçonner que les corrections qui restent encore à trouver, ne sont pas considerables. C'est pour quoi nous n'augmenterons le lieu du noeud que de 20′. Pour l'inclinaison, qui fait la seconde hypothese, nous la devrions aussi augmenter, si la correction trouvée ne nous paroissoit un peu forte. Car l'inclinaison n'a accru de 11° pour les orbites calculées dans

le

le §. 19. & 24; cependant la différence des erreurs des temps calculés étoit de 1,75 — 0,665 = 1,085 jours. Or 1,085 : 11 = 0,666° : 6,8°, au lieu de 7°,07. Ainsi elle devroit être tout au plus de 6°,50′. C'est pourquoi nous diminuerons de 20′ l'inclinaison, ensorte que les secondes hypothêses seront fondées sur l'*inclinaison* = 41°0′30″.

§. 41. Nous refondrons les calculs des trois observations, emploiées dans les §§. 28, 29, 30, sur les deux élémens corrigés & sur deux nouvelles suppositions. Mais nous ne rendrons que les résultats des calculs que nous avons revus plusieurs fois.

I. Observation du 23. Aout 12ʰ 17′ 1″.

	Premiere supposition	*Seconde supposition*
Noeud 11ˢ 24° 44′ 31″	Noeud 11ˢ 25° 4′ 31″	Noeud 11ˢ 24° 44′ 31″
Lieu de ♀ 11ˢ 1° 0′ 22″	—— 11ˢ 1° 0′ 22″	Lieu de ♀ 11ˢ 1° 0′ 22″
p = 23° 44′ 9″	p = 24° 4′ 9″	p = 23° 44′ 9″
Inclinaison = 41° 20′ 30″	*Inclinaison* = 41° 20′ 30″	Inclinaison = 41° 0′ 30″
distance au noeud ou l'angle *N S C* = 4° 59′ 23″	distance au noeud ou l'angle N S C′ = 5° 3′ 14″	distance au noeud ou l'angle N S C″ = 5° 1′ 55″
log. dist. *S C* = 0,1047497	log. dist. *S C′* = 0,1070923	log. dist. *S C″* = 0,1050712

II. Observation du 4. Septembre 13ʰ 11′ 52″

Noeud 11ˢ 24° 44′ 31″	11ˢ 25° 4′ 31″	11ˢ 24° 44′ 31″ Noeud
Lieu de ♀ 11 12° 39′ 56″	11ˢ 12° 39′ 56″	11ˢ 12° 39′ 56″
p = 12° 4′ 35″	p = 12° 24′ 25″	p = 12° 4′ 35″
Distances au noeud ou l'angle *NSL* = 9° 8′ 41″	l'angle *NSL′* = 92° 2′ 56″	l'angle *NSL″* = 9° 16′ 5″
log. dist. *SL* = 0,0089776	log. dist. *SL′* = 0,0098741	log. dist. *SL″* = 0,0090722

III. Observation du 12. Septembre 14ʰ 47′ 19″

Noeud 11ˢ 24° 44′ 31″	11ˢ 25° 4′ 31″	11ˢ 24° 44′ 31″
Lieu de ♀ 11ˢ 20° 31′ 3″	11ˢ 20° 31′ 3″	11ˢ 20° 31′ 3″
p = 4° 13′ 28″	p = 4° 33′ 28″	p = 4° 13′ 28″
Distances au noeud ou l'angle *NSM* = 12° 21′ 40″	l'angle *NSM′* = 13° 27′ 59″	l'angle *NSM″* = 12° 55′ 47″
log. dist. *SM* = 9,9274019	log. dist. *SM′* = 9,9235198	log. dist. *SM″* = 9,9264313

§. 42. Des distances de la Comète au soleil & des *élongations* au noeud, ont été déduites les anomalies, les paramétres, & les temps des secteurs comme aux §§. 31, 32, 33. pour former des équations propres à déterminer les corrections.

Pour les raisons alleguées dans le §. 39. nous avons déréchef employé les secteurs décrits entre les observations I. & III. & entre la II. & III.

Les temps des secteurs de la première & troisième observation sont $m = 19{,}083$ jours, $m' = 19{,}694$, & $m'' = 19{,}109$. Or le temps observé est $= 20{,}104 = M$, donc $M - m = 1{,}021$, $m' - m = 0{,}611$, $m'' - m = 0{,}026$. Mais l'on a augmenté la longitude du noeud de $20'$ donc $20' : 0{,}611 = x : 0{,}03055\,x$, ainsi que la correction x sera exprimée en minutes. On trouvera de même le coëfficient de $y = 0{,}30130$, D'où résulte cette équation $1{,}021 = 0{,}03055\,x + 0{,}0013\,y$, ou bien l'équation T, qui sera $785{,}385 - 23{,}500\,x = y$.

Les temps des secteurs derivés de la seconde & troisième observation étoient, $m = 7{,}272$, $m' = 7{,}769$, $m'' = 7{,}373$. Or le temps observé étant $= 8{,}066$ jours $= M$, il y aura $M - m = 0{,}794$, $m' - m = 0{,}497$, $m'' - m = 0{,}101$, d'où résultent $0{,}794 = 0{,}02485\,x + 0{,}00505\,y$, & l'équation II. ou $157{,}228 - 4{,}921\,x = y$.

De la combinaison des équations I. & II. on déduira $x = + 33', 85 = 33'\,51''$, & $y = - 9', 35 = - 9'\,21''$. Appliquant les corrections au lieu du noeud & à l'inclinaison, ou trouvera la longitude du noeud $= 11^s\,24^\circ\,44'\,31'' + 33'\,51'' = 11^s\,25^\circ\,18'\,22''$, & l'inclinaison $= 41^\circ\,20'\,30'' - 9'\,21'' = 41^\circ\,11'\,9''$.

§. 43. *Les deux élémens que nous venons de corriger doivent répondre* assès exactement à l'orbite de la Comète; je dis assès exactement, parceque le mouvement de cette Comète, comme, on le verra dans la suite, s'écarte assès de la Parabole; on ne sauroit aspirer à une plus grande exactitude au moyen de l'hypothêse Parabolique. Je pourrois donc à la maniere de M. *Euler* aussi corriger les trois élémens de l'orbite, mais j'ai dejà insinué qu'il vaudra mieux les déduire des deux élémens corrigés: parceque les corrections du parametre p. e. ne dépendent pas immediatement des corrections de la longitude du noeud & de l'inclinaison; qu'elles dépendent plutot des distances de la Comète au soleil & des élongations au noeud; parce qu'on trouve le parametre par le secours des rayons vecteurs & des angles compris. Il faudroit donc plutôt commencer par corriger les rayons vecteurs & les angles compris, ensuite en déduire le parametre, qui deviendra ainsi très correct. Au reste je ne prétends pas faire la critique de la Méthode du sublime *Euler*. Elle est exacte dans le rapport sous le quel l'auteur s'en est servi, lorsque les élémens, posés pour base du calcul, n'avoient besoin que de très legères corrections. Mais

comme je regarde le Problême de déterminer l'orbite de la Comète au moyen de l'inclinaison & du noeud, comme très interessant, j'en voudrois rendre l'usage plus étendu & faire voir qu'il fournit l'unique moyen, le plus sur & le plus court pour déterminer les orbites des Comètes. D'ailleurs je suis très convaincu de l'utilité de ce Problême même pour la théorie des planètes, sur tout pour celles de *Mercure*, de *Venus* & de *Saturne*, dont on peut facilement déterminer le noeud & l'inclinaison. J'ai fait là dessus des assais que je publierai un jour.

Je vais prouver ce que j'ai avancé par les corrections qu'il faudroit apporter à la distance périhélie. Les distances périhélies déduites de la première & troisième observation, sont $p = 0{,}098150$, $p' = 0{,}100963$, $p'' = 0{,}104200$. Donc l'augmentation de 20′ pour la longitude du noeud a produit la variation $p' - p = 0{,}002831$ dans la distance périhélie; ainsi 20′: $x' = 0{,}002831 : 0{,}00014155\ x'$, or x a été trouvé $= 33{,}85$, donc la correction de la distance périhélie provence de la correction du noeud est $= 0{,}004759$. On trouvera de même la correction de la distance périhélie dépendante de celle de l'inclinaison $= -\ 0{,}00825$. En sorte que la distance périhélie feroit $= 0{,}099684$. Or nous déduirons une toute autre distance périhélie des deux élémens corrigés, comme nous allons voir.

§. 44. Au moyen de la longitude du noeud $= 11^s\ 25^\circ\ 18'$, de l'inclinaison $= 41^\circ\ 11'$ & de la première & troisième observation entre les quelles il y a un inter valle de vingt jours, je vais déterminer la distance & le lieu du périhélie, & le temps du passage par le périhélie.

Le 23 Aout	Le 12 Septembre
Distance au noeud, ou $NSC = 5^\circ\ 7'\ 4''$	Distance au noeud, ou $NSL = 14^\circ\ 18'\ 31''$
Distance de la Comète au soleil ou log. $SC = 0,\ 1088563$	log. $SL = 9{,}9204054$
l'angle Compris $CSL = 9^\circ\ 11'\ 27''$	
anomalie $ASC = 143^\circ\ 52'\ 8''$	anomalie $ASL = 134^\circ\ 40'\ 40''$

log. $AS = 9{,}0918737$, distance périhélie $AS = 0{,}12356$.

La longitude du périhélie est = à celle du noeud $+ NSC + ASC = 4^s\ 24^\circ\ 17'\ 22''$.

Conformement au §. 18. nous chercherons le temps du passage par le périhélie moyennant les tables de M. *La Lande*, or le temps des tables répondant à l'anomalie $ASC = 134^\circ\ 40'\ 40''$, est de 573,44 jours.

donc log. 573,44 = 2,7584880	donc le temps de l'anomalie $A\ S\ L$
log. $\sqrt{A S^3}$ = 8,6378082	eſt de 24 j. 21^h 41′ 45″
log. 24,904 j. = 1,3962962	le temps de l'obſerv. = 13 Sept. 14^h 47′ 19″
	temps du périhélie 7. Octob. 12^h 29′ 4″.

§. 45. Pour vérifier notre théorie parabolique nous la comparerons avec d'autres théories, en déduiſant de ces théories les lieux obſervés de la Comète. Pour cet effet nous calculerons trois lieux de la Comète ſelon les théories de M. *Euler*, qui differe peu de celle de M. *Wargentin*, ſelon celle de M. *La Lande*, & la nôtre. Je ne me ſervirai pas de la théorie de M. *Lambert*, expoſée dans les nouveaux Mémoires de *l'Académie de Berlin* Tome premier, parceque ce ſavant Géometre en à promis une plus exacte, qui *n'eſt pas encore venue à* ma connoiſſance. Je choiſirai trois obſervations, ſavoir celle du 8. Octobre, comme la plus éloignée du périhélie, & la *plus proche du noeud*; *celle du 12. Sept. où la terre étoit le plus* près du noeud, & celle du 14. Oct. comme la plus proche *des limites*, *& une des* plus proches du périhélie. La première nous faira connoître, ſi le noeud a été bien déterminé, & ſi l'orbite s'écarte beaucoup de la parabole; la troiſieme obſervation nous fera juger de l'exactitude de l'inclinaiſon.

Nous donnerons d'abord les formules propres a diriger les calculs. Le temps du *périhélie & de l'obſervation*, & la *diſtance périhélie étant* connus, on ſait le temps écoulé depuis le périhélie jusqu'au temps de l'obſervation. Il *s'agit donc de* trouver l'anamalie ϕ, par l'équation $\left\{\text{tang}\,\frac{\phi}{2}\right\}^3 + 3\ \text{tang}\,\frac{\phi}{2} = \frac{3\,t}{c\,p\,\sqrt{2\,p}}$:

§. 21. Je ne connois pas de Géometre qui ait propoſé une ſolution de cette équaton plus expéditive que M. *Euler* dans ſes *recherches ſur la Comète* de 1769. page 56. Poſant $\frac{3\,t}{2\,c\,p\,\sqrt{2\,p}} = A$, il s'agit de chercher un angle μ, en ſorte que $\cos 2\,\mu = A$, enſuite un angle ν, de maniere que tang $\nu = \sqrt[3]{\text{tang}\,\mu}$, d'où l'on déduit enfin tang $\frac{\phi}{2} = 2\cos 2\,\nu$. Mais au lieu de chercher l'anomalie par cette voye, nous ferons uſage des tables. Conformement à ce qui a été dit dans le §. 21. Nommons t, l'intervalle entre le paſſage par le périhélie & le temps de l'ob-

ſervation, nous avons $\frac{t}{\sqrt{p^3}}$ = temps tabulaire = T, avec le quel nous chercherons l'anomalie ϕ.

2.) Or l'élongation du Périhélie au noeud ∓ l'anomalie ou $N\ S\ A \mp A\ S\ C = N\ S\ C$ = élongation de la Comète au noeud. (*Fig.* 11.) Soit $V\ N\ L$ l'écliptique, (*Fig.* 16) N le noeud, la Comète en C, l'angle $C\ N\ L$ eſt l'inclinaiſon de l'orbite, & l'arc $N\ C$, eſt l'angle $N\ S\ C$ de la *Fig.* 11.

3.) Or tirant l'arc du grand Cercle $C\ L$, qui ſera la latitude géocentrique, & l'arc $N\ L$, la différence entre les longitudes héliocentriques du noeud & de la Comète.

Donc ſin $C\ L$ = ſin $N\ C \times$ tang. I.

4) Tang $N\ L$ = tang $N\ C \times$ tang I.

5.) La longitude du noeud $V\ N + N\ L = V\ L$ = longitude héliocentrique de la Comète.

6.) La différence de la longitude héliocentrique à la longitude de la terre donne l'angle au ſoleil T S C.

7.) $S\ C = \frac{p}{\left\{\cos\frac{\phi}{2}\right\}^2}$ = diſtance vraye du ſoleil à la Comète.

8.) $S\ c = S\ C \cos\ C\ L$ = diſtance racourcie.

9.) Or la diſtance du ſoleil à la terre ou $S\ T$ étant connue, il faut chercher conformement a l'article 18. un angle θ, enſorte que tang $\theta = \frac{S\ T}{C\ T}$, ſi $S\ T > C\ T$, alors on aura tang $(\theta - 45°)$ tang $\left\{90° - \frac{T\ S\ c}{2}\right\}$ = tang $\left\{\frac{T - C}{2}\right\}$, & par conſéquent on ſaura l'angle à la terre $C\ T\ S$.

10.) Or l'angle $\pm\ C\ T\ S$ + longitude du ſoleil, donne la longitude gécontrique de la Comète.

11.) Enfin tang G = tang $C\ L \times \frac{\text{ſin } S}{\text{ſin } C S T}$ = tangente de la longitude géocentrique.

§. 46. Nous commencerons par l'obfervation du 12. Septembre $14^h\ 47'\ 19''$.

Théorie de M. *Euler*	Théorie de M. *La Lande*	Notre Théorie
log. $AS = 9{,}0887920$	log. $AS = 9{,}0925803$	log. $A\ S = 9{,}0$
Temps du périhélie =		
7. Octob. $15^h\ 37'\ 37''$	7. Octob. $12^h\ 30'\ 0''$	7. Octob. $12^h\ 29'\ 4''$
Temps de l'obfervat. =		
12. Sept. $14^h\ 47'\ 19''$	12. Sept. $14^h\ 47'\ 19''$	12. Sept. $14^h\ 47'\ 19''$
Interv. du t. = 25,035 jours	24,904 jours	24,904 jours
log. 25,035 = 1,3985476	log. 24,904 = 1,3962865	log. 24,904 = 1,3962865
log. $\sqrt{AS^3} = 8{,}6331880$	log. $\sqrt{AS^3} = 8{,}6388704$	log. $\sqrt{AS^3} = 8{,}6378105$
= 2,7653596	= 2,7574161	= 2,7584760
t. des tables = 582,58 jours	temps des tables = 572,26	573,92 jours
l'anom. = $134°\ 57'\ 19'' = \varphi$	*anomalie* = $134°\ 38'\ 31''$	$134°\ 41'\ 32'' = \phi$
dift. du périhélie		
au noeud = $4^s\ 29°\ 19'\ 51''$	d. au noeud. = $4^s\ 29°\ 5'\ 11''$	$4^s\ 28°\ 59'\ 22''$
NSC ou $NC = 14°\ 13'\ 32''$	$N\ C = 14°\ 26'\ 40''$	$14°\ 17'\ 50''$
inclin. = $40°\ 49'\ 33'' = I$	inclinaifon = $40°\ 37'\ 33''$	$41°\ 11' = I$
fin $NC = 9{,}3904754$	fin $N\ C = 9{,}3974582$	9,3926126
fin $I = 9{,}8154196$	fin $I = 9{,}8136589$	9,8185364
fin $C\ L = 9{,}2058950$	fin $C\ I = 9{,}2111171$	9,2111490
latit. hél. = $9°\ 14'\ 42'' = H$	lat. hélioc. = $9°\ 21'\ 28''$	$9°\ 21'\ 30''$
tang $NC = 9{,}4040001$	tang $N\ C = 9{,}4114405$	9,4062764
cos. $I = 9{,}8789240$	cos. $I = 9{,}8802291$	9,8765680
tang $NL = 9{,}2829241$	tang $NL = 9{,}2916696$	9,2828444
$NL = 10°\ 51'\ 33''$	$N\ L = 11°\ 4'\ 30''$	$NL = 10°\ 51'\ 27''$
l. du noeud = $11^s\ 25°\ 4'\ 41''$	noeud = $11^s\ 25°\ 0'\ 43''$	$11^s\ 25°\ 18'$
long. hélioc. = $0^s\ 5°\ 56'\ 14''$	longit. = $0^s\ 6°\ 5'\ 13''$	$0^s\ 6°\ 9'\ 27''$
l. de la terre = $11^s\ 20°\ 31'\ 3''$	l. de la terre = $11^s\ 20°\ 31'\ 3''$	$11^s\ 20°\ 31'\ 3''$
ang. au f. $TSc = 15°\ 25'\ 11''$	$TSc = 15°\ 34'\ 10''$	$= 15°\ 38'\ 24''$
log. p = l. $AS = 9{,}0887920$	log. $p = 9{,}0925803$	log $p = 9{,}0918737$
$\left\{\frac{\cos.\phi}{2}\right\}^2 = 9{,}1666952$	$\left\{\frac{\cos\phi}{2}\right\}^2 = 9{,}1722179$	9,1713908
log. dift. vr. = 9,9220968	log. $S\ C = 9{,}9203624$	$S\ C = 9{,}9204829$
cos. lat. hél. = 9,9943218	cos $H = 9{,}9941817$	9,9941810
dift. rac. $S\,c = 9{,}9164186$	log. $S\,c = 9{,}9145441$	9,9146639
log. $S\,T = 0{,}0021900$	log. $S\,T = 0{,}0021900$	0,0021900

l. t.$(\theta+45°)$ = 0,0857714	tang$(\theta+45°)$ = 0,0876459	0,0875261
θ = 5°37′17″	θ = 5° 44′ 33″	θ = 5°44′6″
90° − ½ *STc* = 82°17′24″	90° − ½ *STc* = 82°12′55″	82°10′48″
tang θ = 8,9931176	tang θ = 9,0024358	tang θ = 9,0018649
t.(90° − ½*STc*) = 0,8684356	t.(90° − ½*STc*) = 0,8641955	9,8622700
tang $\left\{\frac{C-T}{2}\right\}$ = 9,8615532	tang $\frac{C-T}{2}$ = 9,8666313	9,8641349
$\frac{C-T}{2}$ = 36° 1′ 6″	$\frac{C-T}{2}$ = 36°20′13″	$\frac{C-T}{2}$ = 36°10′50″
$\frac{C+T}{2}$ = 82° 17′ 24″	$\frac{C+T}{2}$ = 82°12′55″	$\frac{C+T}{2}$ = 82°10′48″
T ou *STC* = 46° 16′ 18″	*T* = 45°52′42″	*T* = 45°59′58″
lieu du ☉ = 5ˢ 20°31′3″	☉ = 5ˢ 20°31′3″	☉ = 5ˢ 20°31′3″
Long. *Géoc.* 4ˢ 4° 14′ 45″	*Géocent.* 4ˢ 4°39′21″	4ˢ 4°31′5″
Long. Obſerv. 4 4°31′45″	Obſerv. 4ˢ 4°31′45″	4ˢ 4°31′45″
Erreur + 17′	Erreur − 7′36″	Erreur + 40″
tang hélioc. = 9,2115762	tang *H* = 9,2169400	tang *H* = 9,2169621
ſin *T* = 9,8589133	ſin *T* = 9,8560435	ſin *T* = 9,8569301
9,0704895	9,0729835	9,0738922
ſin *TSc* = 9,4246986	ſin *S* = 9,4287924	ſin *S* = 9,4307072
9,6457909	9,6441911	9,6430850
latit. Géocentr. 23°51′49″	latit. Géoc = 23°47′8″	23°43′52″
latit. Obſervée 23°44′18″	latit. Obſerv. = 23°44′18″	23°44′18″
erreur − 7′ 31″	erreur − 2′50″	erreur + 26″

Par un ſemblable calcul, ayant calculé l'obſervation du 8. Aout 11h 5′ 7″, j'ai trouvé les réſultats ſuivants; *ſelon*

la Théorie de M. *Euler*	Théorie de M. *La Lande*	Notre Théorie
Longit. Géoc. 1ˢ 5°22′59″	1ˢ 5°25′4″	1ˢ 5°42′45″
Longit. Obſ. 1ˢ 5°24′35″	1ˢ 5°24′35″	1ˢ 5°24′35″
erreur + 1′36″	erreur − 29″	erreur − 18′10″
Latitude Géoc. 1°35′2″	1°34′50″	1°33′0″
Latitude Obſerv. 1°26′26″	1°26′26″	1°26′26″
erreur − 8′36″	erreur − 8′24″	erreur − 6′ 34″

L'obſervation du 24. Octobre 6h 4′ 41″ m'a fourni les réſultats ſuivants, ſelon

la théorie de M. *Euler*	La théorie de M. *La Lande*	La nôtre
Longit. Géoc. 7s 20° 21′ 0″	7s 20° 26′ 0″	7 20° 19′ 6″
Longit. Obſ. 7s 20° 21′ 39″	7s 20° 21′ 39″	7s 20° 21′ 39″
erreur + 39″	erreur — 4′ 21″	erreur + 2′ 33″
Latit. Géocentr. 17° 20′ 2″	17° 19′ 47″	17° 31′ 38″
Latitude Obſerv. 17° 19′	17° 19′	17° 19′
erreur — 1′ 2″	erreur — 47″	erreur — 12′ 38″

Les erreurs des Théories nous fourniſſent matiere à pluſieurs réflexions importantes ſur le calcul des Comètes.

§. 45. Pour confronter les calculs avec les obſervations, quelques Aſtronomes, à ce qui m'a paru, ne font pas attention aux latitudes. Ils ne retouchent leurs calculs que ſur les longitudes. Mais comme le lieu d'un aſtre eſt determiné enſemble par la latitude & par la longitude, enſorte que ſi l'une ou l'autre s'écarte trop de l'obſervation, le lieu ne ſera pas bien déterminé, partant la théorie de la Comète ne ſera pas encore exacte. Les trois obſervations, les quelles nous avons calculées, nous fourniſſent donc ſix points ſavoir trois longitudes & trois latitudes, avec les quels il faudra concilier les réſultats des trois théories. Je regarde comme exactes les réſultats des longitudes, qui ne ſont pas affectés d'une erreur plus grande que de 4 minutes, mais je conſidere comme peu exacts les réſultats des latitudes chargés d'une erreur plus de 2 minutes, parceque le changement en longitude ſe trouve près de trois fois plus conſidérable que celui en latitude. Cela poſé, on verra que chaqu'une des trois théories s'accorde avec trois parties des ſix obſervées, & qu'elles s'éloignent aſſès des trois autres. Il paroit donc qu'aucunes des théories n'eſt très exacte. 2.) Notre théorie s'accorde parfaitement avec le lieu obſervé le douze Septembre. Or il faut remarquer, que c'eſt un des trois lieux, ſur les quels nous avons établi nos calculs. La théorie de M. *Euler* eſt bien d'accord avec les lieux obſervés le 8. Aout & le 24. Octobre, exceptée la latitude du 8. Aout. Or M. *Euler* a dreſſé ſes recherches ſur ces deux lieux. Cependant ſa théorie ne ſe peut concilier avec les obſervations du douze. J'ignore ſur quelles obſervations M. *La Lande* a fondé ſa théorie, je ſoupçonnerois prèsque que c'eſt ſur celles de M. *Euler*. Il eſt certain que la théorie d'une planète ſera d'autant plus exacte qu'elle ſera déduite d'un plus grand nombre d'obſervations. Pour perfectionner

ner la théorie des planètes, de plus habiles Aſtronomes ſe ſont ſervis des obſervations de trois lieux héliocentriques, déduits des conjonctions & oppoſitions, d'ailleurs connoiſſant exactement le temps périodique, pour en dériver les anomalies moyennes & ſuppoſant d'ailleurs l'excentricité & l'aphélie aſſès bien déterminés. Mais en effet combien d'obſervations n'a-t-il donc pas fallu employer pour définir le temps périodique, pour fixer l'aphélie, & pour déterminer la plus grande équation du centre. Mais pour meſurer la courſe des aſtres les moins ſtables, l'on ne veut employer que trois obſervations & encore purement géocentriques. Qui ne voit qu' avec ce peu de moyens il eſt difficile de reuſſir dans une entrepriſe ſi hardie. Le Problême propoſé par *Newton* eſt trés beau, trés élégant, mais *il* me paroit plutôt ſusceptible *d'une exactitude Géometrique* qu' Aſtronomique. La Parabole, *il eſt vrai, eſt bien* déterminée par trois points donnés, ou par trois rayons vècteurs & *les angles* compris; mais de ces *données ne réſulte pas* encore la *ſituation de l'orbite. Le lieu du noeud & l'inclinaiſon* ne dépendent aucunement de la détermination Géometrique de la Trajectoire. Ceux qui commencent par ſuppoſer deux diſtances de la Comète au ſoleil, qu'ils rectifient peu-à-peu par les temps obſervés, enſuite qu'*ils* ont recours à une troiſieme obſervation, qu'ils concilient avec les deux autres. Enfin l'on n'en déduit rien autre choſe que la courbe géometrique; les autres élémens, comme le noeud, l'inclinaiſon, qui ſont proprement des données aſtronomiques, s'en dérivent bien ou mal. Il eſt impoſſible qu'on puiſſe de cette façon déterminer tous les élémens de la théorie d'une planéte. L'aſtronomie ſe réduiroit à peu de choſe, ſi de pareils procédés étoient bons.

§. 48. De ce que je viens de remarquer, je me propoſe de tirer pluſieurs conſéquences intéreſſantes pour la théorie des Comètes. Je remarque d'abord qu'on ne doit pas s'attendre à des théories exactes, déduites du Problême des trois lieux géocentriques. Les calculs répondent à la vérité aux trois lieux donnés, parce qu'on les manie & retouche ſi long temps, qu'ils s'accordent enſemble. C'eſt pour celà que les calculs ſelon la théorie de M. *Euler*, s'accordent avec les obſervations du 8. Aout & du 24. Octobre, & que les miens ſont d'accord avec l'obſervation du 12 Sept. Il importe de remarquer que, quoi qu'on puiſſe déterminer l'orbite moyennant l'inclinaiſon & le lieu du noeud, l'inverſe du problême *eſt irréſoluble*; ſavoir qu'on ne pourra pas déduire ces deux mêmes *élémens* des trois autres, ſavoir du temps & du lieu du périhélie & de la diſtance périhélie. Cependant ce ſont ces trois élémens qui réſultent des recherches ordinaires ſur les Comètes, on voit

par-là de quelle importance eſt l'exacte détermination du lieu du noeud & de l'inclinaiſon. On ne pourra donc disconvenir, que notre méthôde fondée ſur le lieu du noeud & l'inclinaiſon eſt plus Aſtronomique que les autres. Comme ce ſont les élémens les plus importans, dont les autres dépendant, il faudra les déterminer avec la derniere exactitude pour transmettre à la poſterité la véritable déſcription des Comètes, propre à reconnoître le retour de ces aſtres. Si les obſervations le permettoient, on devroit commencer par déterminer l'inclinaiſon & le lieu du noeud plutôt que ſuppoſer deux diſtances à volonté. Du moins on devroit choiſir les obſervations proches du noeud & des limites. Ainſi on devroit s'attacher aux obſervations d'entre le 8 & le 22 Aout poûr notre Comète, & enſuite à celles depuis le 22. Octobre *jusqu'au* 4. *Novembre*, *qui ſont* aux environs des limites.

Cependant il y a des cas où le calcul des Comètes ſouffre *moins de difficultés*. La Comète de 1743 & 1744. entre autres, eſt dans ce cas. Son mouvement vû de la terre étoit lent & presque uniforme. Il varioit même peu près du périhélie. Pendant 70 jours la longitude n'a varié que de 50° & la latitude de 10 degrés. Le changement diurne en longitude n'étoit que 40 minutes excepté près du périhélie, où il étoit $1\frac{1}{2}$ degré. D'ailleurs l'on a continué d'obſerver cette Comète à deux jours de ſon paſſage par le périhélie. Toutes ces circonſtances mettoint les Aſtronomes à leur aiſe pour faire accorder les lieux obſervés & calculés aux ſecondes près, comme entre autres M. *Hiorter* a fait voir dans les *Mémoires de l'Académie de Suede* de l'année 1745. Mais il s'en faut beaucoup que la Comète de 1769 ſe ſoit trouvée dans des circonſtances ſi favorables. Pendant 70 jours la longitude à varié prés de 170 degrés. Le mouvement étoit très inégal, parcequ'elle s'approchoit fort près de la terre. Au commencement de ſon apparition le changement diurne en longitude étoit vers le milieu de Septembre de 6 à 5 degrés. L'obſervation la plus proche du périhélie n'a été faite qu'à 15 jours après le paſſagé par le périhélie. La plus grande partie des obſervations faites depuis le 8 Aout jusqu' aux 15 Septembre ne ſont renfermées qu' entre les anomalies de 148° à 132°. Enſorte que la Comète n'a parcouru dans ſon orbite qu'un ſecteur de 16. degrés environ, tandisque la longitude géocentrique a fait une variation dé 105 degrés. Or toutes ces raiſons ne juſtifient elles pas les erreurs, qui doivent réſulter des théories ordinaires? Ces mêmes raiſons ne devroient-elles pas engager les mathématiciens à employer des méthôdes fondées plutot ſur l'aſtronomie que ſur la pure Géometrie? En un mot, l'on doit approcher le calcul des Comètes de celui des Planètes.

Pour cet effet il s'agira de pratiquer des moyens convenables pour réduire l'orbite parabolique à l'elliptique. Quoique cette matiere n'entre pas dans le plan du programme de l'*illustre Académie*, je prendrai pourtant la liberté de proposer mes vues sur ce sujet après avoir repassé les articles *précédens.*

REMARQUE GÉNÉRALE

Sur les articles précédens.

§. 49. Qu'il nous soit permis de retracer en peu de mots la marche que nous avons suivie dans nos recherches; elle nous paroit simple. Après avoir trouvé le lieu de la Comète, où les distances du soleil à la terre & à la Comète sont égales; on en a déduit la distance de la Comète à la terre. Avec cette premiere distance de la Comète à la terre, on a cherché une seconde, selon les formules des §§. 16, 17, 18. Ensuite on a déterminé le temps du secteur, le lieu du noeud, & l'inclinaison moyennant deux distances au soleil, déduites des deux distances racourcies à la terre. On a répété le même calcul, ayant augmenté ou diminué selon les circonstances, la premiere des distances Géocentriques, pour voir si l'inclinaison & la longitude du noeud doivent recevoir des corrections additives on soustractives. Avec la longitude du noeud & l'inclinaison tirées du plus exact des deux calculs, l'on a corrigé tous les cinq élémens de l'orbite. Nous ne saurions nous dispenser de vérifier chaque partie de notre méthôde par les observations, pour la mettre dans tout son jour. Commençons d'abord par examiner si nous nous sommes beaucoup écartés du temps que nous avons assigné pour les distances égales du soleil à la terre & à la Comète. Nous avions fixé ce temps pour le 4 Septembre 13^h ou plutôt entre le 4 & 5 Septembre §§. 11. & 12.

Les logarithmes des distances du soleil à la terre étoint = 0,0031279 & = 0,0031149, le 4 Sept. 13^h & le 5 Sept. 13^h. Prennons le milieu entre ces logarithmes qui donne 0,0031219. Ce sera aussi le logarithme de la distance de la Comète au soleil. Reste donc à chercher le temps ou la Comète aura été à une telle

diſtance du ſoleil. Or $\cot \frac{1}{2} \phi = \sqrt{\frac{A\,S}{S\,M}}$ détermine l'anomalie *A S M*.

log. *A S* = 9,0918737	temps des tables = 742,59
log. *S M* = 9,0031219	log. 742,59 = 2,8707491
	log. $\sqrt{A\,S^3}$ = 8,6378105
19,0887518	1,5085596
log. $\cos \frac{1}{2} \phi$ = 9,5443759	temps vrai = $32^{j}\ 6^{h}\ 2'$
$\phi = 138^{\circ}\ 59'\ 42''$	temps du périhélie = 7 Oct. $12^{h}\ 29'\ 4''$
	temps cherché 5 Sept. $6^{h}\ 27'\ 4''$

Ayant déterminé *ce temps pour le* 4 *Septembre* 13^{h}, nous avons commis une erreur de 17 heures. Dans l'intervalle de 17 heures, qui *n'eſt pas conſidérable* pour cette recherche, *la diſtance* de la Comète au ſoleil *à beaucoup varié*. Elle étoit = 1,02230, le 4 Sept. $13^{h}\ 11'$ & elle étoit = 1,00721 *le 5 Sept.* $6^{h}\ 27'$; en ſorte que le changement de la diſtance dans l'eſpace de 17 heures importoit 0,01509 ou la $\frac{1}{68}$ partie. C'eſt à cauſe de ce changement conſidérable que nôtre ſuppoſition nous a fait commettre une erreur aſſés grande §. 21., la quelle cependant n'eſt pas préjudiciable à l'uſage du Théoreme de M. *Lambert*, parceque l'erreur a plutôt reſulté des circonſtances peu favorables, que de la méthode même.

§. 50. Nous examinerons le ſecond point de notre méthôde qui a pour objet la recherche d'une ſeconde diſtance de la Comète à la terre, une premiere étant donnée. Par le calcul expoſé dans le §. 46. j'ai trouvé les diſtances racourcies de la Comète à la terre = 0,35052 pour le 4 Sept. $13^{h}\ 11'$, & = 0,30792 pour le 12. Sept. $14^{h}\ 47'$. Selon ce qui a été fait dans le §. 17, j'ai cherché la *diſtance* racourcie du 12 Sept. moyennant celle du 4 Sept., & je l'ai trouvée = 0,30832, la quelle ne ſurpaſſe que de 0,0004 celle qui a *été déduite de la* théorie même. L'exacte valeur de la ſeconde diſtance racourcie que je viens de déduire des formules expoſées dans le §. 18, ne fournit-elle pas une demonſtration rigoureuſe des formules mêmes? L'illuſtre *Académie* exige des formules *Générales* & *rigoureuſes*. Quant aux générales, mes formules le ſont. Mais l'on pourroit douter de leur rigueur géometrique, parceque ces formules ſont dreſſées ſur la ſuppoſition du mouvement uniforme & rectiligne. Mais comme il s'agit d'une queſtion Phyſico-Mathématique, il faut en même temps faire attention à la certitude Phyſique & Ma-

thématique. Or en fait de Phyſique on admet comme vérités rigoureuſes, toutes les ſuppoſitions qui s'écartent inſenſiblement des réſultats des expériences. Nos formules ſont dans ce cas; ce que prouvent non ſeulement les réſultats que nous venons d'indiquer, mais encore les conſtructions des formules. Car nous ne ſuppoſons le mouvement uniforme que d'un jour à l'autre. Or cette ſuppoſition eſt Phyſiquement rigoureuſe. Quoique nous nous ſoyons un peu relachés dans nos calculs ſur cette ſuppoſition, ayant employé des intervalles de deux à deux jours, nous avons pourtant parfaitement bien réuſſi, & celà à l'égard d'une Comète, qui a cauſé tant de difficultés aux calculateurs.

§. 51. Si l'on ne jugeoit pas bonne la cauſe que nous plaidons, nous ne croirions pas pour celà avoir perdu le procès. Nous en appellerions au *Problême principal*, & perſonne ne peut *douter qu'il ne ſoit établi ſur des formules* générales & rigoureuſes. La recherche du lieu de la Comète, dont la diſtance au ſoleil égale celle du ſoleil à la Comète & *celle d'une ſeconde diſtance ne ſervent en effet, qu'à fournir les données* du problême principal, ſavoir le lieu du noeud & l'inclinaiſon. S'il étoit donc un moyen de déduire des obſervations d'une Comète ces deux élémens, l'on pourroit ſe diſpenſer des deux recherches que nous avons fait *précéder le problême capital*. Quoiqu'on ne puiſſe revoquer en doute les démonſtrations rigoureuſes *des formules*, *l'on* pourra cependant douter de leur généralité. Mais *nous l'avons inſinué* dans le §. 46, *que nous avons* rendu *l'uſage de* ce *problême plus* général que M. *Euler* ne l'a fait, l'ayant traité d'une maniére différente. Il ſe peut employer avec des élémens même peu correcťs. Parceque nous ne cherchons que de corriger les deux élemens capitaux, nous ne corrigeons pas les trois autres élémens moyennant les correćtions du noeud & de l'inclinaiſon, mais nous déduiſons trois élémens plus correćts des deux élémens corrigés. De cette façon, *nous agiſſons en toute* rigueur. De plus notre ſolution fournit le moyen d'apprécier le degré d'exaćtitude des correćtions, parceque nous formons trois équations pour déterminer deux inconnues, de ſorte qu'il en réſulte trois valeurs, pour chaque inconnue. Si ces valeurs ſont égales ou ſi elles différent peu, il eſt mathématiquement certain que les correćtions ſont vrayes & partant que *l'orbite* eſt exaćte. On a employé les deux données du problême, telles qu'on les avoit tirées de l'orbite calculée en ſecond lieu dans le §. 24. Mais *l'on auroit* pu les déterminer proportionellement aux erreurs, qui ont *réſulté* des deux orbites. Le lieu du noeud étoit en $11^s\ 17^\circ\ 23'$, ſelon l'orbite trouvée dans le §. 19. laquelle don-

noit une erreur de 1,75 jours. Le lieu du noeud selon la seconde orbite étoit dans le 11^s 21° 57′ 7″ & l'erreur du calcul montoit a 0,814 jours, d'ou j'infère, 1,65 — 0,814 ou 0,936: 0,814 = différence des longitudes du noeud ou 4° 33′: 3° 57′. Ainsi le noeud devroit être en 11^s 25° 54′. Les inclinaisons ont été trouvées de 23° 27′ & de 34° 16′. Par une semblable proportion on trouvera l'inclinaison de 43° 40′. Or ayant supposé que la longitude du noeud & l'inclinaison s'approchent uniformement de leurs vrayes valeurs, ce qui n'est pourtant pas admissible, il faudroit diminuer leurs valeurs, pour y établir les deux Hypothêses, p. e. de 30 minutes; parceque les quantités s'approchant par degrés insensibles de leur vrayes valeurs, elles semblent se retarder plutôt que s'accélerer dans leurs approches. Cependant nous nous sommes pas beaucoup écartés de la vérité par le premier essai, quoiqu'il soit assès grossier, n'ayant augmenté que d'un degré ces deux élémens peu corrects. Mais comme notre méthôde de trouver une seconde distance est assès exacte, l'on auroit plutôt trouvé des élémens exacts si l'on avoit calculé une troisieme orbite selon §. 23. L'on auroit pour cet effet pu augmenter de 0,01000 ou de 0,02000 la distance racourcie de la Comète à la terre. Nous nous engageons de prouver par calcul ce que nous venons d'avancer, si l'Académie jugeoit notre mémoire digne d'être imprimé. Nous avions en vue de tirer les deux élémens souvent mentionnés, d'une troisieme orbite plus exacte, mais pour faire voir la bonté de nos procédés, nous nous sommes exprès rélâchés sur plusieurs points.

DERNIER ARTICLE

Sur la réduction de l'orbite Parabolique à l'Elliptique.

§. 52. Nous avons averti, que nous ne ferions qu' ébaucher la méthôde de réduire le mouvement des Comètes à celui des planétes; parceque cette matiere n'entre pas dans les vues de l'illustre *Académie.* Cependant nous n'avons pu nous en dispenser entierement puisque la théorie parabolique nous paroit insuffisante. Le premier pas à faire dans cette recherche est des plus hardis. Il faut pour ainsi

dire *enjamber des siecles.* Il s'agit de trouver le grand axe de l'ellipse & le temps périodique. Pour nous orienter dans cette espace immense nous proposerons d'abord un problême affin de trouver à peu près le grand axe.

Soit $A\,B$ le grand axe de l'ellipse $= 2\,x$, $E\,D$ le demi petit axe $= y$, $A\,S$ $=$ distance perihelie donnée $= p$. L'aire du secteur $M\,S\,C = A$, & $\theta =$ le temps dans lequel le secteur est décrit. (*Fig.* 4.)

Puis, soit T $=$ au temps periodique de la Comète, $t =$ temps periodique de la terre & $1 =$ à la distance moyenne de la terre au soleil. Cela posé, nous formerons trois équations pour déterminer le temps périodique de la Comète & les deux axes. Si $\pi : 1$ marque le rapport de la circonférence au diametre, l'aire de l'ellipse sera $= \pi\,x\,y$, donc $\theta : T = A : \pi\,x\,y$, d'où l'on déduit l'équation $T = \frac{\pi\,x\,y\,\theta}{A}$ où $T^2 = \frac{\pi^2\,x^2\,y^2\,\theta^2}{A^2}$ Or $1 : x^3 = t^2 : T^2$, donc $T^2 = t^2\,x^3 = \frac{\pi^2\,x^2\,y^2\,\theta^2}{A^2}$, partant $y^2 = \frac{t^2\,A^2\,x}{\pi^2\,\theta^2}$.

Mais par les propriétés de l'ellipse il y a, $y^2 = 2\,p\,x - p^2 = \frac{t^2\,A^2\,x}{\pi^2\,\theta^2}$, d'où l'on tire le demi - grand axe ou $x = \frac{p^2}{2\,p - \frac{t^2\,A^2}{\pi^2\,\theta^2}}$. Le temps périodique ou $T =$ $t\,x\,\sqrt{x}$, & l'excentricité $= x - p$, & le demi-petit axe ou $y = \frac{A\,t\,x}{\theta\,\pi}$.

§. 53. Pour faire usage des équations que nous venons d'établir, nous supposerons que la distance périhélie de l'orbite parabolique differe peu de celle de l'orbite elliptique. Cela posé, l'on déterminera le secteur $M\,S\,\theta$ pour un temps donné, en le considérant comme un triangle, dont l'aire est $= \frac{SM \times SO}{2}$ sin MSO $= A$; ce qu'on pourra faire, si l'angle compris ne surpasse pas 2 degrés. Si l'on vouloit employer un secteur parabolique, on trouveroit pour le grand axe une quantité infiniment grande, car le dénominateur de l'expression de x, étant

$2p - \frac{A^2 t_2}{\pi^2 \theta^2}$, deviendroit $= o$, parceque $\theta = \frac{2 A t}{\pi \sqrt{4p}}$.

Il s'agit donc de trouver les anomalies *A S M*, *A S O*, dont la différence donnera l'angle du ſecteur *M S O*. Quand même les anomalies feroient vicieuſes à l'égard de l'éllipſe, cependant leurs différences ou l'angle compris feroit moins vicieux. D'ailleurs le ſecteur elliptique étant plus petit que le parabolique, il eſt clair que le ſecteur parabolique reduit au triangle rectiligne approchera plus prés du ſecteur Elliptique.

Comme l'orbite de la Comète, dont la diſtance périhélie eſt peu conſidérable comme *la nôtre*, *n'approche* de l'éllipſe que vers le 130 ou 140° d'anomalie, il faudra choiſir un ſecteur *pres de ces anomalies. D'autant plus* parcequ' un tel ſecteur contient peu de degrés & répond à un plus long temps. C'eſt pour quoi je ferai uſage d'un *ſecteur décrit en ſix jours de puis le* 14 Aout 11h 5′ 7″ jusqu'au 8 Aout 11h 5′ 7″. Les anomalies ſont *A S M* = 146° 10′ 14″ & *A S O* = 147° 27′ 1″, donc l'angle compris M S O = 1° 16′ 47″ & $\theta = 6$.

Log. $S\ O = 0{,}1967937$	log. $A^2 = 6{,}8179508$
log. $S\ M = 0{,}1642547$	log. $t^2 = 5{,}1251614$
ſin $MSN = 8{,}3489570$	$1{,}9431122$
$8{,}7100054$	log. $\pi^2 = 0{,}9942948$
log. $2 = 0{,}3010300$	log. $\theta^2 = 1{,}5563025$
log $A = 8{,}4089754$	$2{,}5505973$
donc $\frac{A^2 t^2}{\pi^2 \theta^2} = 0{,}24689$	log. $\frac{A^2 t^2}{\pi^2 \theta^2} = 9{,}3925149$
$2p = 0{,}24712$	log. $p^2 = 8{,}1877474$
$2p - \frac{A^2 t^2}{\pi^2 \theta^2} = 0{,}00023$	log. $\left\{ 2p - \frac{A^2 t^2}{\pi^2 \theta^2} \right\} = 6{,}3617278$
	$x = 52{,}7247 = 1{,}7220196$

Ayant trouvé le demi-grand axe, on aura le temps périodique exprimé en années poſant, $t = 1$ an, ſavoir $T = \sqrt{x^3}$

Or log. $x^3 = 5{,}1660578$, log. $\sqrt{x^3} = 2{,}5830294$. Donc $T = 382{,}82$ années. L'excentricité eſt $= 52{,}60114$.

§. 53.

§. 53. Quoique la détermination du grand axe n'eſt peut-être pas exacte, elle nous mettra pourtant en état de juger de l'Ellipticité de l'orbite de notre Comète, par le ſecours des formules expoſées, dans le §. 4. D'abord la variation de la diſtance périhélie eſt $= \frac{16\,p^2}{32\,a} = \frac{p^2}{2\,a}$,

Or $\log. p^2 = 8{,}1837474$
$\log. a = 1{,}7220196$
$\log. 2 = 0{,}3010300$
$\overline{\quad 2{,}0230496}$ donc $\frac{p^2}{2a} = 0{,}00014.$

$\log. \frac{p^2}{2\,a} = 6{,}1606978$

Cette variation n'eſt d'aucune importance. D'où il s'enſuit qu'il faut très ſoigneuſement *déterminer la diſtance périhélie de cette Comète*, parcequ'elle convient auſſi à l'orbite elliptique.

Pour connoître plus exactement le cours de cette Comète, cherchons le parametre, dont la moitié eſt *l'appliquée du foyer N S*. On ſait que le petit demi axe $E\,D = \sqrt{(A\,D^2 - S\,D^2)}$, & que $N\,S = \frac{A\,D^2 - S\,D^2}{A\,D} = (AD + SD)$ $(A\,D - S\,D) \times \frac{1}{A\,D}$

Or $S\,D = A\,D - p = 52{,}60114$

$A\,D = 52{,}72470$	$\log. (A\,D + S\,D) = 2{,}0225380$
$S\,D = 52{,}60114$	$\log. (A\,D - S\,D) = 9{,}0918737$
$A\,D + S\,D = 105{,}32584$	$1{,}1144117$
$A\,D - S\,D = p = 0{,}12356$	$\log. A\,C = 1{,}7220196$
	$\log. N\,S = 9{,}3923921$

Donc $N\,S = 0{,}24683$, & le parametre $= 0{,}49366$. Mais dans la parabole, $N\,S$ eſt $= 0{,}24712$. On voit donc que la vraye orbite tombe en dedans de l'orbite parabolique et que les deux orbites ont la même origine au Périhélie A.

Que $A\,F\,M$, $A\,m$ O repréſentent les orbites parabolique & elliptique. (*Fig.* 13.) Poſons que les ſecteurs $A\,S\,M$, $A\,S\,m$ ſont décrits en temps égaux, en ſorte que les

projectiles ſe trouveroient en même temps en M & m. Or ces ſecteurs ſont en raiſon ſousdouble des parametres. C'eſt à dire $\sqrt{FS} : \sqrt{\gamma S}$ = aire ASM : aire ASm, or $\sqrt{\frac{\gamma S}{FS}} = 0{,}99941$, donc pour notre cas, appellant P le ſecteur parabolique, on aura le ſecteur elliptique contemporain $= 0{,}99941\ P$.

§. 54. Pour connoître plus exactement le mouvement elliptique de notre Comète, cherchons les variations des anomalies ou MSm à diſtances égales Sm; Sn, moyennant la formule $\frac{p}{4\,a \tang \phi}$. Pour cet effet employons l'obſervation la plus reculée du périhélie, ſavoir celle du 8 Août, pour laquelle l'anomalie ϕ étoit $=$ 137° 27′ 1″.

log. $a = 1{,}7320196$	log. $\frac{p}{4} = 9{,}0913621$
tang $\phi = 9{,}8050233$	log. a tang $\phi = 1{,}5270429$
$1{,}5270429$	ſin $(\pi - \phi) = 7{,}5643192$

donc variation de l'anomalie $= 12' 20''$

Cette variation eſt aſſès conſidérable pour être négligée. Il paroit que l'orbite de l'ellipſe approchoit dejà aſſès d'une Ellipſe vers le 8 Août. Par un ſemblable calcul on trouvera la variation de l'anomalie pour le 12 Septembre de 7′ 47′, qui ne laiſſe pas d'être encore conſidérable même à l'égard d'une des plus petites anomalies, ou le mouvement vu du ſoleil etoit aſſès lent. Les aberrations des diſtances elliptiques ſont encore plus ſenſibles par la formule $\frac{y^2 \cos \phi}{2\,a}$. Tout cela ne prouve que trop bien ce que nous avons avancé pluſieurs fois, ſavoir que le mouvement de la Comète a été ſenſiblement elliptique même pendant tout le temps qu'on l'a pu obſerver, & que par conſéquent l'on ne ſaura bien déterminer ſon mouvement par l'hypothêſe parabolique.

§. 55. Quoique je paſſerois entierement les bornes préſcrites à ce mémoire, ſi je voulois traiter amplement du mouvement elliptique des Comètes, je ne ſaurois me diſpenſer d'en propoſer quelques eſſais. Le temps du paſſage par le périhélie étant conſtaté par l'hypothêſe parabolique, il s'agit de trouver l'anomalie vraye pour un

temps donné. La recherche de l'anomalie vraye est ce qu'il y a de plus intéressant & de plus difficile dans cette matiere. Il faut prendre une route différente de celle, qui conduit à la détermination des anomalies vrayes des planètes. Car l'on ne sauroit faire usage des anomalies moyennes pour la recherche des anomalies vrayes. Les anomalies moyennes donneroient pour les courtes apparitions des Comètes des aires trop petites & qui différeroient trop peu les unes des autres à un intervalle de 20 ou 30 jours. La révolution de notre Comète s'acheve en 383 ans, le mouvement moyen annuel seroit donc de 56′ 23″, le moyen mouvement de 9′ 24″, perdant 60 jours de puis le périhélie jusqu' au 8 Aout, jour de la premiere observation, & il ne seroit que de 3′ 8″ pendant 20 jours. Il faudra donc renoncer aux méthôdes astronomiques de déterminer l'anomalie vraye *par la* moyenne. D'ailleurs je n'envisage pas *les difficultés du* calcul, dans les quelles nous engageroit la grande excentricité. Et enfin une erreur même de 50 ans dans le temps periodique ne produiroit qu'une variation de $6\frac{1}{2}$′ *sur le mouvement* moyen annuel. Parmi *les méthôdes propres* à déterminer les anomalies elliptiques des Comètes, je donne la préférence à celle de M. *Simpson*, qui se trouve dans les *Miscellaneous Tracts* page 58. Je tacherai de suivre cette méthôde, la rendant plus rigoureuse & plus expeditive.

§. 56. Nous avons fait voir que les orbites paraboliques & elliptiques de notre Comète partent de la même origine en A. Les aires ASM, ASm sont décrites en temps égaux. La distance périhélie AS étant $= p$, l'abscisse $AP = x$, le demi - grand - axe de l'ellipse $= a$, son paramètre $= q$, il y aura $MP = \sqrt{4px}$, & $BP = \sqrt{\frac{q}{2a}}\sqrt{(2ax - x^2)}$. Or $\sqrt{2ax - x^2} = \left\{1 - \frac{x}{4a} - \frac{x^2}{32a^2}\right\}\sqrt{2ax}$; il y aura $BP = \left\{1 - \frac{x}{4a} - \frac{x^2}{32a^2}\right\}\sqrt{qx}$,

Parceque les parametres $4p$ & q different peu, on aura $MB = \left\{\frac{x}{4a} + \frac{x^2}{32a^2}\right\}\sqrt{qx}$,

partant à - peu - près l'aire $ABM = \int MB \times dx = \left\{\frac{x^{\frac{5}{2}}}{10a} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{112a^2}\right\}\sqrt{q}$.

Ménant la tangente TM & la normale MR, à cause de $TS = SM = SR$,

l'anomalie Parabolique $A\ S\ M$ ou ϕ sera $= 2\ P R M$. Or $P R = 2\ p$, & $\frac{MP}{PR} = \frac{\sqrt{4px}}{2p} = \text{tang}\ \frac{1}{2}\phi$; d'où il s'ensuit que $\sqrt{x} = \text{tang}\ \frac{1}{2}\phi \sqrt{p}$. De cette maniere l'équation de l'aire $A B M A$ se changera en celle-ci, $\left\{ \frac{(\text{tang}\ \frac{1}{2}\phi)^5}{10\ a} + \frac{(\text{tang}\ \frac{1}{2}\phi)^7}{112\ a^2} p \right\} p^2 \sqrt{p\ q}$.

Les secteurs contemporains $A\ S\ M$, $A\ S\ m$ sont en raison sous double des parametres, ensorte que posant $\sqrt{\frac{q}{4p}} = n$, il y aura $A\ S\ m = n\ P$. Or la variation du secteur elliptique *s'exprime par le petit secteur* $m\ S\ n$. Mais négligeant le petit espace $M n B$, en sorte qu'on prendra l'aire $A n M A$ au lieu de l'aire $A B M$, il y aura aire $m\ S\ n = P - n\ P - \left\{ 0,\ 1 + \frac{(\text{tang}\ \frac{1}{2}\phi)^2}{112\ a} p \right\} \frac{(\text{tang}\ \frac{1}{2}\phi)^5}{a} \times p^2 \sqrt{p\ q}$. De plus l'aire $m\ S\ n = \frac{m S \times S n}{2}$ sin $m\ S\ n$, à cause de sa petitesse, on pourra encore écrire $\frac{m S^2}{2}$ sin $m\ S\ M$.

Pour parvenir à une premiere approximation, on pourra dabord mettre $m\ S = S\ M = \frac{p}{(\cos\ \frac{1}{2}\phi)^2}$. C'est de là qu'on tire la variation ou la correction de l'anomalie, savoir sin $m\ S\ M = 2\ (n - 1)\ P \frac{(\cos\ \frac{1}{2}\phi)^4}{p^2} - 2 \left\{ (0,\ 1 + \frac{(\text{tang}\ \frac{1}{2}\phi)^2}{112\ a} p \right\} \times (\text{tang}\ \frac{1}{2}\phi)^5 (\cos\ \frac{1}{2}\phi)^4 \frac{\sqrt{p\ q}}{a}$. On sait que le secteur Parabolique P est $= \left\{ \frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}\phi^2}{3} + 1 \right\} p^2\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\phi$. Partant la correction de l'anomalie sera, ou sin $m\ S\ M = 2\ (n - 1) \left\{ \frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}\phi^2}{3} + 1 \right\} \text{tang}\ \frac{1}{2}\phi\ (\cos\ \frac{1}{2}\phi)^4 - 2 \left\{ 0,\ 1 + \frac{(\text{tang}\ \frac{1}{2}\phi)^2}{112\ a} p \right\} \times$

$(\tang \frac{1}{2}\phi)^5 (\cos \frac{1}{2}\phi)^4 \frac{\sqrt{pq}}{a}$. Or pour la premiere fois on pourra omettre le terme $\frac{p \tang \frac{1}{2}\phi^2}{112\, a}$, enforte que la correction fera $= 2 \left\{ (n-1) \frac{(\tang \frac{1}{2}\phi^2)}{3} + 1 - 0{,}2 \tang \frac{1}{2}\phi^4 \right\}$. $\frac{\sqrt{pq}}{a} \tang \frac{1}{2}\phi (\cos \frac{1}{2}\phi)^4$. Or ayant trouvé l'anomalie elliptique $ASm = ASM \pm mSM = \theta$, on déterminera la diftance Sm par la formule $\frac{\frac{1}{2}q}{1 + e\cos\theta}$ ou $e =$ l'excentricité $= \frac{a-p}{a}$.

Après avoir trouvé la diftance elliptique Sm, l'on fera en état de déterminer plus exactement la *correction de l'anomalie, partant l'anomalie même & la diftance, car nous avons employé* SM au lieu de Sm. Pour la feconde approximation il faudra employer la formule fuivante $2\,(n-1) \left\{ \frac{1}{3} (\tang \frac{\phi}{2})^2 + 1 \right\} \frac{p^2 \tang \frac{1}{2}\phi}{Sm^2} = 2 \left\{ 0{,}1 + \frac{p}{112\, a} (\tang \frac{1}{2}\phi)^2 \right\} \tang \frac{1}{2}\phi^5 \frac{pp\sqrt{pq}}{a \times Sm^2}$, & déterminer déréchef la diftance Sm.

De cette façon l'on pourra recommencer à plufieurs fois le calcul jusqu'à ce qu'on ne rencontre plus de réfultats fenfiblement différens pour les corrections de l'anomalie. Je crois que j'ai traité cette matiere avec plus de jufteffe & que j'en ai rendu la pratique plus aifée que M. *Simpfon* ne la fait dans l'ouvrage cité. L'on pourroit auffi tenir compte de l'efpace omis MnB, dans la feconde approximation, qui, peut-être confidéré comme un triangle rectiligne dont l'aire eft $= \frac{1}{2}\, n M \times MB$, fin nMB, ou Mn fe détermine par la différence des diftances SM & Sm ou SM, & fin $nMB = \frac{SP}{SM} = \frac{p}{SM}$ $(\tang \frac{1}{2}\phi^2 - 1)$.

§. 57. Pour enfeigner l'application de nos formules & pour faire voir que la Théorie de cette Comète & peut-être les théories de la plus part des Comètes ne

peuvent être exactement fondées que sur le mouvement elliptique, je prendrai pour exemple l'observation la plus eloignée, celle du 8 Aout.

L'anomalie ϕ etoit $= 147° \ 27' \ 1''$. Le log. $p = 9{,}0918737$, & log. $q = 9{,}6934221$, & $n - 1 = 0{,}00059$, & log. $a = 1{,}7220196$.

$$\log. \tan \tfrac{1}{2}\phi = 0{,}5347000$$
$$\log. (\tan \tfrac{1}{2}\phi)^2 = 1{,}0694000$$
$$\log. 3 = 0{,}4771212$$
$$0{,}5922788$$
$$\frac{\tan \frac{1}{2}\phi^2}{3} = 3{,}91092$$
$$\frac{\tan \frac{1}{2}\phi^2}{3} + 1 = 4{,}91092$$
$$\log. (\tfrac{1}{3} \tan \tfrac{1}{2}\phi^2 + 1) = 0{,}6911629$$
$$\log. (n-1) = 6{,}7708520$$
$$7{,}4620149$$
$$(n-1)(\tfrac{1}{3} \tan \tfrac{1}{2}\phi^2 + 1) = 0{,}0028974$$

$$\log. \tan \tfrac{1}{2}\phi^4 = 2{,}1388000$$
$$\log \ 0{,}1 = 9{,}0000000$$
$$\log. \sqrt{pq} = 9{,}3926479$$
$$0{,}5314479$$
$$\log. a = 1{,}7220196$$
$$8{,}8094283$$
$$0{,}1 \tan \tfrac{1}{2}\phi^4 \, \frac{\sqrt{pq}}{a} = 0{,}0644801$$
$$(n-1)(\tfrac{1}{3} \tan \tfrac{1}{2}\phi^2 + 1) = 0{,}0028974$$
$$- 0{,}0615827$$
$$\text{dont le logarith} = 8{,}7894586$$
$$\log. \tan \tfrac{1}{2}\phi = 0{,}5347000$$
$$\cos \tfrac{1}{2}\phi^4 = 7{,}7901692$$
$$7{,}1143278$$
$$\log. 2 = 0{,}3010300$$
$$- \log. \sin MSm = 7{,}4153578$$

donc $- MSm = 8' \ 57$.

Le signe (−) indique qu'il faut prendre la correction dans le sens contraire à celui que la figure montre, c'est à dire que la correction est additive. L'anomalie elliptique ASm sera donc $= 147° \ 35' \ 58'' = \theta$.

A cause de $e = 1$ à très peu près, on pourra dans une premiere approximation poser la distance $Sm = \dfrac{\frac{1}{2} q}{1 + \cos \frac{1}{2}\theta} = \dfrac{\frac{1}{4} q}{\cos \frac{1}{2}\theta^2}$.

$$\log. 4 = 0{,}6020600$$
$$\log. \cos \tfrac{1}{2}\theta^2 = 8{,}8911942$$
$$9{,}4932542$$

$$\log. q = 9{,}6934221$$
$$9{,}4932542$$
$$\log. Sm = 0{,}2001679$$

L'hypothése parabolique fournit log. $SM = 0{,}1967937$.

§. 58. Les corrections de l'anomalie & de la distance, que nous venons de trouver ne sont pas tout-à-fait exactes, celle de l'anomalie pourra aller jusqu'à 12 minutes, si l'on continuoit le calcul conformement à ce qu'il vient d'être dit. Nous avons calculé le lieu géocentrique avec l'anomalie & la distance corrigées selon §. 40. & nous avons trouvé l'erreur en longitude $= + 16' \ 3''$, qui étoit $= - 18' \ 10''$ selon la théorie parabolique, & l'erreur en latitude $= + 2' \ 23''$, que les trois théories paraboliques ont donné plus grande de six à 8 minutes, §. 41. Il paroît par ces résultats, quels changemens apporte l'anomalie au lieu géocentrique de la Comète. Il suit de tout cela que la théorie parabolique ne fournit que des élémens approchés de la vraye orbite, c'est donc par le secours de l'orbite *Elliptique* qu'il faut apprécier les élémens déterminés selon l'*hypothêse parabolique*. Voici un moyen de faire cet *examen des élémens paraboliques*.

Parcequ'on n'est *pas bien assuré de la valeur du grand axe de l'ellipse*, qu'on établisse *deux Hypothêses* ou plutot trois suppositions semblables à celles que nous avons employées pour corriger le noeud & l'inclinaison. Qu'on calcule dans une premiere supposition avec l'axe trouvé & tous les élémens paraboliques deux lieux géocentriques très éloignés l'un de l'autre, comme ceux du 8 Août & du 15 Septembre. Pour la seconde supposition, on employera les élémens de l'orbite parabolique & l'axe augmenté ou *diminué* d'*une quantité un peu considérable* p. e. de 10., dans notre cas. La troisieme Hypothése sera dressée sur le grand axe de la premiere supposition & sur les autres élémens, excepté un seul p. e. l'inclinaison, qu'on diminuera, dans notre cas de 20'. Ayant déduit de ces trois Hypothêses les lieux géocentriques & ayant corrigé le grand axe & l'inclinaison moyennant deux équations, qui contiennent deux inconnues, comme il a été pratiqué dans le §. 35; l'on formera *successivement des troisiemes suppositions* pour les trois ou quatre autres élémens. L'on prendra le milieu des résultats pour le grand axe afin d'en déterminer la grandeur plus exactement. On jugera les degrés d'exactitude des autres élémens par les corrections trouvées. C'est de cette façon que j'ai rigoureusement recherché l'orbite de la Comète de 1769. Mais comme ce sujet n'appartient pas à la question proposée, je n'ose plus longtemps abuser de la patience de mes *illustres juges*. Je finis en déclarant que je veux volontiers ajouter des recherches plus approfondies, à ma dissertation en forme d'appendice, si l'Académie faisoit quelqu' ac-

cueil à mes travaux. J'ai calculé avec moins de peine la Comète de 1757, ſelon ma méthode. Je m'engage à faire de pareilles recherches ſur telle Comète qu'on me propoſera, pour vu que les obſervations ſoient exactes & faites dans un eſpace de trente jours.

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES COMÉTES,

Préſenté à l'Académie Royale des Sciences de Pruſſe en 1777.

PAR

M. HENNERT,

Profeſſeur en Philoſophie & Mathématiques, Membre des Sociétés des Sciences de Harlem, de Fleſſingue, de Rotterdam & d'Utrecht.

Comètes que l'on craint à l'égal du tonnerre
Ceſſez d'épouvanter les peuples de la terre.

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES COMÉTES,

Préſenté à l'Académie Royale des Sciences de Pruſſe, en 1777.

Quoique les *méthôdes indirectes* ſoyent *moins élégantes* que *les méthôdes directes*, les Aſtronomes leur donnent pourtant la préférence, parce qu'elles ont l'avantage d'être plus courtes, & qu'elles n'expoſent pas les Calculateurs à ſe tromper par rapport à l'ambiguité des ſignes des quantités, que la nature du problême en queſtion rend inévitable. On n'ignore pas les efforts que M. *Euler* à faits pour établir la théorie des planètes ſur des méthôdes directes au moyen de trois lieux *géocentriques* de la planète. Cependant aucun Aſtronome n'a fait uſage des ſublimes recherches du grand Géometre. On pourroit donc préſumer que de pareilles recherches ſur les orbites des Comètes n'auroient aucun ſuccès, parceque les Comètes ſont aſſujetties aux mêmes loix du mouvement, que les planètes, ſi la grande excentricité de ces aſtres n'avoit pas fourni des moyens pour abréger les Calculs longs & pénibles qu' exige l'orbite elliptique des planètes. Il eſt certain que les orbites Paraboliques cauſent moins d'embarras aux calculateurs que la Théorie elliptique. Mais auſſi la théorie des Comètes déterminée par la Parabole n'eſt vraye qu'à - peu - près. Ce n'eſt qu'un moyen d'abréger les Calculs, ou plu-

tôt ce n'eſt qu'une méthôde d'approximation. Puisque les Comètes décrivent des Ellipſes & non des Paraboles, & puisque la théorie vraye ou elliptique des Comètes doit s'étabir ſur ſix élémens, & que le paraboliſme n'exige que cinq éléments; car le grand axe ou le temps périodique n'entre pas alors en ligne de compte, n'eſt-il pas évident que la méthôde directe fondée ſur le paraboliſme doit faire naitre un problème plus que déterminé? Voilà pourquoi les recherches géometriques & analytiques ſur l'orbite des Comètes n'ont pas produit des réſultats déterminés. On pourroit encore y ajouter l'ambiguité des ſignes des quantités algébraiques, ou bien la ſituation douteuſe des lignes, qui entrent dans la conſtruction du problême en queſtion; parceque les données ou les trois lieux géocentriques de l'aſtre ne définiſſent pas exactement *la ſituation de l'orbite*; par exemple elles ne déterminent pas ſi la ligne des noeuds doit tomber entre la Terre & la Comète ou en deçà de la Comète ou de la terre. Je commencerai donc mes recherches ſur l'importante question, propoſée pour la ſeconde fois par *l'Académie Royale des ſciences*, par démontrer la poſſibilité d'une méthôde directe, fondée ſur la théorie elliptique. Enſuite je ferai voir que la méthôde directe ne peut s'appliquer au paraboliſme, parceque le probléme deviendroit plus que déterminé. Enfin je propoſerai des méthôdes directes & approchées au défaut des méthôdes directes & exactes.

PREMIER ARTICLE

Qui roule ſur la maniere de déterminer l'orbite elliptique des Comètes par la voye directe & rigoureuſe.

§. 1. *Etant donnés trois lieux obſervés ou géocentriques de la Comète avec les temps écoulés entre les obſervations, déterminer la diſtance périhélie, le grand axe, le lieu du périhélie, le lieu du noeud, l'inclinaiſon de l'orbite & le temps du paſſage de la Comète au périhélie* (Fig. 17.)

Soit le lieu du périhélie en P, la diſtance périhélie PS, la ligne des noeuds ſe trouve en NSn, la terre en T & la Comète eſt en C, abaiſſant du lieu de la Comète C la perpendiculaire Cc ſur le plan de l'écliptique, où la terre & la ligne des

noeuds sont placées, & tirant les lignes SC, cT; l'angle cTS connu par l'observation, détermine la différence entre la longitude de la Comète & celle du Soleil Qu'on abaisse du lieu vrai de la Comète C la perpendiculaire CI sur la ligne des noeuds, & qu'on mene cI, l'angle CIc déterminera l'inclinaison de l'orbite. Je pose $ST = A$, $CS = D$, l'angle $cTS = T$, la latitude géocentrique ou $CTc = G$, l'inclinaison de l'orbite ou l'angle $CIc = I$, l'angle $NST = u$ que fait le rayon de la terre avec la ligne des noeuds. Soit $PSN = P$ ou la différence entre la longitude du périhélie & celle du noeud, & $N = CSN =$ l'angle que fait le rayon vecteur avec la ligne des noeuds. Enfin soit $b =$ demi-parametre, & $e =$ l'excentricité de l'orbite.

Le triangle xTS fournit $xT = \dfrac{A \sin U}{\sin (U+T)}$ ensuite on aura $CI = D \sin N$, & $cI = CI \cos I = D \sin N \cos I$, donc $cx = \dfrac{cI}{\sin (U+T)} = \dfrac{D \sin N \cos I}{\sin (U+T)}$; donc $cT = cx + xT = \dfrac{A \sin U + D \sin N \cos I}{\sin (U+T)}$.

Mais $Cc = CI \sin I = D \sin N \sin I$ & aussi $Cc = cT \operatorname{tang} G$, donc $cT = \dfrac{D \sin N \sin I}{\operatorname{tang} G}$. En égalant les deux valeurs de cT, on aura $\dfrac{D \sin N \sin}{\operatorname{tang} G} = \dfrac{A \sin U + D \sin N \cos I}{\sin (U+T)}$. Or on sait que $D = b : (1 + e \cos (P - N))$, d'où résultera l'équation premiere; $b \sin N (\sin I \sin (U+T) - \operatorname{tang} G \cos I) = A \sin U \operatorname{tang} G (1 + e \cos (P - N))$.

§. 2. Pour former une seconde équation, je remarque, qu'en nommant H la latitude héliocentrique ou l'angle CSc, il y aura, $\operatorname{tang} H = \dfrac{\operatorname{tang} G \sin cST}{\sin T} = \dfrac{\operatorname{tang} G \sin (cSN + U)}{\sin T}$.

Mais aussi $\operatorname{tang} H = \dfrac{Cc}{cS} = \dfrac{D \sin N \sin I}{cI : \sin cSN} = \dfrac{D \sin N \sin I}{D \sin N \cos I} \times \sin cSN =$

tang I ſin $c\,S\,N$, donc tang I ſin $c\,S\,N = \frac{\text{tang}\,G}{\text{ſin}\,T}$ (ſin $c\,S\,N$ cos U + cos $c\,S\,N$ ſin U),

d'où l'on tire tang $c\,S\,N = \frac{\text{tang}\,G\,\text{ſin}\,U}{\text{tang}\,I\,\text{ſin}\,T - \text{tang}\,G\,\text{ſin}\,U}$. Or tang $c\,S\,N = \frac{C\,I}{S\,I}$

$= \frac{D\,\text{ſin}\,N\,\text{cos}\,I}{D\,\text{cos}\,N}$ = tang N cos I (§. 1.), d'où réſulte l'équation II.

tang N ſin I ſin T — tang N cos I tang G cos U = tang G ſin U.

§. 3. La Comète eſt en d & la terre en t, du temps de la ſeconde obſervation. L'angle à la terre ſera donc $d\,S\,t = t$; au lieu de T & l'angle $N\,S\,T = U$ ſera devenu l'angle $N\,S\,t = N\,S\,T - t\,S\,T = U - t\,S\,T$. Or l'on connoit l'angle $t\,S\,T$ ou le mouvement de la terre *dans l'intervalle des deux obſervations*, par la théorie du ſoleil. Soit donc $T\,S\,t = p$, & on aura $N\,S\,t = U - p$, *qu'il faudra ſubſtituer au lieu de l'angle* U, *dans les équations précédentes.* De plus l'angle $C\,S\,N = N$ eſt devenu $D\,S\,N = n$, je poſe enfin la latitude géocentrique $= g$, la diſtance de la terre au ſoleil $= a$, celà étant, l'équation Ire changera en celle-ci, *III.*

b ſin n (ſin I ſin $(U - p + t)$ — tang g cos I) = a ſin $(U - p)$ tang g (1 + e cos $(P - n)$). Enſuite l'équation *II* ſe transformera dans la ſuivante & *IV.*

Tang n ſin I ſin t — tang n cos I tang g cos $(U - p)$ = tang g ſin $(U - p)$.

§. 4. Pour la troiſieme obſervation, l'angle à la terre ſoit $e\,\theta\,S = \theta$, la latitude géocentrique $= \gamma$, l'angle $T\,S\,\theta = q$, il y aura $N\,S\,\theta = U - q$, de plus poſant la diſtance $S\,\theta = \alpha$, & la diſtance de la Comète au noeud ou $E\,S\,N = v$, l'équation *I* ſe changera en celle-ci *V.*

b ſin v (ſin I ſin $(U - q + \theta)$ — tang γ cos I) = α ſin $(U - q)$ tang γ (1 + e cos $(P - v)$), *& l'équation II ſe changera dans celle qui ſuit, VI.*

Tang v ſin I ſin θ — tang v cos I tang γ cos $(U - q)$ = tang γ ſin $(U - q)$.

§. 5. Nous avons donc formé ſix équations, qui renferment huit *inconnues*; ſavoir les quantités b, e, P, U, I, & N, n, v. Reſte à chercher deux équations, que nous déduirons des intervalles du temps entre les trois *obſervations.* Il s'agit donc de trouver une expreſſion algébraique, que repréſente le ſecteur elliptique, proportionnel au temps donné pour les obſervations. Je préſenterai la formule du ſecteur, ce me ſemble, ſous une nouvelle forme. On exprime d'ordinaire les ſec-

teurs par les féries. (*Fig.* 18). Soit le demi grand axe de l'ellipfe, ou $A\,C = a$, le demi petit axe $= c$, la diftance, du foyer S au centre ou $S\,C = f$, l'excentricité s'exprimera donc par $f : a = e$. Soit $P\,C = x$, & $y = P\,M$. L'équation de l'ellipfe détermine $y = \frac{c}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Donc l'aire $P\,M\,D\,C = \frac{c}{a} \int d\,x \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{c\,a}{2}$. Arc fin $\frac{x}{a} + \frac{c\,x}{2\,a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Je défigne par $1 : \pi$ le rapport du rayon à la demi circonférence du cercle, donc l'aire du quart de l'ellipfe $A\,C\,D = \frac{\pi\,a\,c}{4}$, par conféquent l'aire elliptique $A\,P\,M = \frac{a\,c}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Arc fin} \frac{x}{a} \right\} - \frac{c\,x}{2\,a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Soit $D = S\,M =$ au rayon vecteur, & l'anomalie $M\,S\,B$ ou fon fupplément $= P - N$, on aura $x = f - S\,P = f - D \cos(P - N)$. Partant le fecteur $A\,S\,M$ aura pour expreffion $A\,P\,M - S\,P\,M = \frac{a\,c}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Arc fin} \left(e - \frac{D \cos(P - N)}{a}\right) \right\} - \frac{a\,e\,D}{2} \text{ fin } (P - N)$

Or nommant b le demi paramétre de l'ellipfe, on aura $c = \sqrt{a\,b}$; & $a = \frac{b}{1 - e^2}$ donc, $a\,c = \frac{b^2}{\sqrt{(1 - e^2)^3}}$ le fecteur $A\,S\,M$ aura donc pour expreffion, $\frac{b^2}{2\sqrt{(1 - e^2)^3}}$ $\left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Arc fin} \left(e - \frac{(1 - e^2) \cos (P - N)}{1 + e \cos(P - N)}\right) - \frac{b^2\,e \text{ fin } (P - N)}{2\,(1 - e^2)(1 + e \cos(P - N))} \right\}$

Voilà donc l'expreffion *analytique* du fecteur elliptique décrit de puis le périhélie jusqu'à la premiere obfervation. L'on trouvera par une opération femblable, le fecteur parcouru depuis le périhélie jusqu'à la feconde obfervation, lequel s'exprimera par $\frac{b^2}{2\sqrt{(1 - e^2)^3}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Arc fin} \left(e - \frac{(1 - e^2) \cos (P - n)}{1 + e \cos (P - n)}\right) \right\} - \frac{- b^2\,e \text{ fin } (P - n)}{2\,(1 - e^2)\,(1 + e \cos (P - n))}$. Donc la différence entre ces deux fecteurs égalera

l'aire du secteur décrite depuis la premiere jusqu'à la seconde observation; le secteur aura pour expression $\frac{b^4}{2\sqrt{(1-e)^3}} \left\{ \text{Arc sin} \left(e - \frac{(1-e^2)\cos(P-N)}{1+e\cos(P-N)}\right\} \right.$ $- \text{Arc sin} \left\{ e - \frac{(1-e^2)\cos(P-n)}{1-e\cos(P-n)} \right\} - \frac{b^2 e}{2(1-e^2)} \left\{ \frac{\sin(P-N)}{1+e\cos(P-N)} - \frac{\sin(P-n)}{1+e\cos(P-n)} \right\}$

§. 6. Le secteur que nous venons d'exprimer analytiquement, est proportionel au temps ecoulé entre la premiere & la seconde observation. Soit ce temps $= R$, l'aire du secteur $= S$, le temps périodique de la Comète $= P$, on aura $P : \pi a c = R : S$, donc $S = \frac{\pi a c R}{R}$. Posant l'unité pour la distance moyenne de la terre au soleil & $\zeta =$ au temps périodique de la terre, on aura $1 : a^3 = \zeta^2 : P^2$, par conséquent $S = \frac{\pi c R}{\zeta \sqrt{a}} = \frac{\pi R \sqrt{b}}{\zeta}$, d'où résultera l'équation VII,

$$\frac{\pi R \sqrt{b}}{\zeta} = \frac{b^2}{2\sqrt{(1-e^2)^3}} \left\{ \text{Arc sin} \left(e - \frac{(1-e^2)\cos(P-N)}{1+e(P-N)}\right) \right\} - \text{Arc sin} \left\{ e - \frac{(1-e^2)\cos(P-n)}{1+e\cos(P-n)} \right\} + \frac{b^2 e}{2(1-e^2)} \left\{ \frac{\sin(P-N)}{1+e\cos(P-N)} - \frac{\sin(P-n)}{1+e\cos(P-n)} \right\}$$

§. 7. Faisant le temps ecoulé entre la premiere & la troisiéme équation $= r$, l'aire du secteur parcourrue dans le temps r fournira enfin l'équation VIII.

$$\frac{\pi r \sqrt{b}}{\zeta} = \frac{b^2}{2\sqrt{(1-e^2)^3}} \left\{ \text{Arc sin} \left(e - \frac{(1-e^2)\cos(P-N)}{1+e\cos(P-N)}\right) \right\} - \text{Arc sin} \left\{ e - \frac{(1-e^2)\cos(P-v)}{1+e\cos(P-v)} \right\} - \frac{b^2 e}{2(1-e^2)} \left\{ \frac{\sin(P-N)}{1+e\cos(P-N)} - \frac{\sin(P-v)}{1+e\cos(P-v)} \right\}$$

§. 8. J'abandonne l'entreprise d'éliminer les huit inconnues, à quiconque voudra l'exécuter. Quoique je n'aye voulu dégager les inconnues qu'en employant les angles au lieu des sinus & des tangentes, je me suis engagé dans des calculs capables de rebuter l'analyste le plus opiniatre, Calculs dont aucun Astronome ne voudra

voudra faire ufage. Il eſt, donc demontré *a priori*, qu'il y a une méthode directe pour déterminer l'orbite elliptique des Comètes, mais il eſt en même temps évident, que les analyſtes manquent actuellement de moyens de ſuivre la voye directe. Peut-être un jour viendra un *Newton* ou un *Leibnitz*, qui créeront une analyſe plus parfaite encore, que celle qui fait l'admiration de notre temps, & qui étonnera les ſiecles à venir. Si les grands génies, qui ſe perdent dans des recherches trop ſubtiliſées ſur les integrations des fonctions à deux variables & ſur le calcul des quantités discontinues, ſi ces génies vouloient refléchir ſur de nouvelles méthôdes analytiques qu'on put ſubſtituer p. e. aux calculs des angles par les ſinus, s'ils pouvoient créer une analyſe plus expéditive que le calcul différentiel & intégral, ils mettroient les mathématiciens en état de réſoudre un grand nombre de problêmes de Phyſique, qu'on doit abandonner *parceque la ſcience du calcul* eſt ſi imparfaite. Je pourrois alléguer pluſieurs exemples pour prouver ce que j'avance ſur l'imperfection de l'analyſe. Je n'alléguerai que les *équations différentielles* qui *réſultent du* problême de *la courbe* que *décrit* un boulet chaſſé dans l'air. Ayant beaucoup travaillé ſur cette matiere, j'oſe aſſurer, que toutes les ſolutions de ce probléme, ſur *tout celles* qui dérivent des ſéries, ne s'accordent pas avec les expériences, parce qu'on a du employer des approximations qui ſouvent ſont fort peu exactes.

SECOND ARTICLE

Où il eſt traité de la méthôde directe, entant qu'elle eſt fondée ſur le Paraboliſme.

§. 9. Cet article ſera court, parcequ'il eſt facile de voir que le Paraboliſme doit rendre nôtre problême plus que déterminé. Il s'agit de conſidérer la queſtion propoſée en Phyſicien, & non en Geomètre ou *in abſtracto*. Or la queſtion propoſée phyſiquement nous oblige de faire des recherches ſur la poſition d'une orbite elliptique, qui ſe détermine par ſix conditions, ſavoir par les ſix eléments de la théorie des planétes. Mais enviſageant la queſtion en Géométre, & ſuppoſant par voye d'approximation, que la Comète parcourre une orbite parabolique, on n'aura beſoin que de remplir cinq conditions; d'où il eſt evident que le paraboliſme doit

fournir une équation de plus qu'il n'y a d'inconnues, c'eſt-à-dire que le problême conſidéré ſous ce point de vue, devient néceſſairement plus que déterminé. Tous les événemens étant déterminés dans la nature, il s'enſuit que tout problême, qui eſt plus que déterminé ou indéterminé, eſt incompatible avec l'ordre des choſes. De pareils problêmes font connoître que nous ignorons quelques unes des circonſtances, qui déterminent l'effet naturel, c'eſt-à-dire, que nons ne connoiſſons point toutes les données requiſes pour resoudre pleinement le problême. Ce feroit le cas de nôtre queſtion, ſi l'on ſuppoſoit que nous ignorions que les Comètes décriviſſent des ellipſes & que nous euſſions reconnu de façon ou d'autre, que les Comètes parcourent des paraboles; alors nous croirions la queſtion plus que determinée & nous abandonnerions la voye directe. Mais ne nous tromperions-nous pas, faute de connoître toutes les circonſtances qui déterminent les orbites des Comètes? Des que nous aurions obſervé le retour d'une Comète, nous prendrions connoiſſance du temps périodique ou du grand axe de l'orbite, nous réſoudrions le problême au moyen de la théorie elliptique, & nous le trouverions exactement déterminé.

§. 10. Pour ne laiſſer rien à déſirer ſur cet article, je ferai voir que le problême réſolu par le paraboliſme ne renferme que ſept inconnues, & qu'il fournit pourtant huit équations. Faiſant la diſtance périhélie $= p$, l'on ſait que le rayon vecteur ou D aura pour expreſſion; $p : \cos \left\{\frac{P - N}{2}\right\}^2$, par conſéquent les équations I, III, V, ſe changeront en celles-ci.

I.) $p \sin N (\sin I \sin (U + T) - \tang G \cos I) = A \sin U \tang G \cos \left\{\frac{P - N}{2}\right\}^2$

III.) $p \sin n (\sin I \sin (U - p + t) = \tang g \cos I) = a \sin (U - p) \tang g \cos \left\{\frac{P - n}{2}\right\}^2$

V.) $p \sin v (\sin I \sin (U - p + \theta) - \tang \gamma \cos I) = \alpha \sin (U - q) \tang \gamma \cos \left\{\frac{P - v}{2}\right\}^2$

(§. 1. 3. 4.)

Les équations II, IV, VI. (§. 1. 3. 4.) reſtent inaltérables, parce qu'elles ne dépendent d'aucune hypothêſe. Il eſt connu que l'aire du ſecteur parabolique, que, décrite depuis le périhélie jusqu'à l'anomalie vraye ϕ, s'exprime par

$p^2 \left\{ \text{tang} \frac{(P-N)}{2} + \frac{1}{3} \text{tang} \frac{(P-N)^3}{2} \right\}$. Donc l'aire du ſecteur, parcourue dans l'intervalle de deux obſervations, aura pour expreſſion $p^2 \left\{ \text{tang} \frac{(P-n)}{2} - \text{tang} \frac{(P-N)}{2} + \frac{1}{3} \text{tang} \frac{(P-n)^3}{2} - \frac{1}{3} \text{tang} \frac{(P-N)^3}{2} \right\}$. Or ce ſecteur ſe rapporte au temps R, écoulé entre deux *obſervations* & s'exprimera auſſi par $\frac{\pi R \sqrt{2p}}{\zeta}$ (§. *6.*) Donc on aura l'équation VII. $\frac{\pi R}{\zeta} = \frac{p \sqrt{p}}{\sqrt{2}} \left\{ \text{tang} \frac{(P-n)}{2} - \textit{tang} \frac{(P-N)}{2} + \frac{1}{3} \text{tang} \frac{(P-n)^3}{2} - \frac{1}{3} \text{tang} \frac{(P-N)^3}{2} \right\}$. *Enfin l'on formera pour le temps compris entre la* première & la ſeconde obſervation, l'équation VIII, $\frac{\pi r}{\zeta} = \frac{p \sqrt{p}}{\sqrt{2}} \left\{ \textit{tang} \frac{(P-v)}{2} - \text{tang} \frac{(P-N)}{2} + \frac{1}{3} \text{tang} \frac{(P-v)^3}{2} - \frac{1}{3} \text{tang} \frac{(P-N)^3}{2} \right\}$. Voilà donc huit équations & ſept *inconnues, ſcavoir,* p, P, U, T, N, n, v. (§. 5.) *par-conſéquent* le *probléme* eſt plus que déterminé.

§. 11. De Célèbres Mathématiciens ont rencontré la même difficulté dans la détermination des orbites paraboliques des Comètes. Je ne ferai mention que des travaux de Meſſieurs *Fontaine* & *du Séjour*, paſſant ſous ſilence d'autres ſavants, qui ont traité géometriquement notre ſujet, parceque *l'Académie* demande avec raiſon, que *le ſujet ſoit traité* analytiquement. En effet les ſolutions géometriques peuvent être très-élégantes & très-ingénieuſes, mais elles feront peu utiles aux Aſtronomes, à moins qu'elles ne ſoient réduites en formules algébriques. M. *Du Séjour* qui a fait de profondes recherches ſur les ſituations des Comètes, dans ſon excellent *eſſai ſur les Comètes*, trouve onze équations & dix inconnues (page 220—223). Cet illuſtre Académicien dit que l'élimination des variables paroit ſi compliquée qu'il eſt difficile d'eſpérer que l'on parvienne par la voye directe à une ſolution générale & utile de la queſtion dont il s'agit. M. *Du Séjour* abandonne auſſi la méthode directe & y ſubſtitue une autre opération; ſuppoſant, qu'on con-

noiſſe à peu près les éléments de l'orbite. L'habile geométre propoſe des équations différentielles propres à corriger les erreurs dont les éléments ſuppoſés ſont affectés & à déterminer avec rigueur les véritables éléments de l'orbite. Cependant le problême réſolu de cette façon reſte encore plus que déterminé (page 231). M. *Fontaine* commence la ſolution de notre problême par la théorie elliptique, mais bientôt il la quitte, parce que le calcul ſeroit immenſe, & il achéve la ſolution par le parabolisme; & le parabolisme lui fournit huit inconnues & neuf équations, ainſi le problême eſt plus que déterminé. (Voiez *Memoires donnés à l'Académie des ſciences, par M.* Fontaine *page* 423, 424). M. *Fontaine* eſt d'ailleurs obligé de prendre deux quantités à volonté, les quelles n'etant pas priſes d'abord exactement, il faut recommencer l'opération en augmentant ou diminuant ces deux quantités jusqu'à ce que les conditions preſcrites ſoient remplies (page 426). Cette maniere d'opérer ne me paroit pas tout à fait directe. Cependant le célèbre Académicien ſemble avoir ſurpaſſé tous les Géometres, qui ont emploié des méthodes directes, parce qu'il a développé les équations & les a rendus plus praticables. Mais s'il étoit permis de prendre deux quantités à volonté, il y auroit des moyens beaucoup plus expéditifs pour réſoudre le problême dont il s'agit. Enfin il eſt évident que l'uſage d'un problême plus que déterminé n'eſt pas moins ſujet à des difficultés que les méthodes d'approximation. C'eſt pourquoi je ne m'arrêterai pas plus long temps ſur cette matiere.

ARTICLE TROISIEME

Ou l'on expoſe des méthodes directes & approchées.

§. 12. Parceque les plus grandes difficultés, qu'on rencontre dans l'élimination des inconnues, viennent principalement des équations, qui expriment les rapports entre les ſecteurs & les temps, ſoit qu'on employe la théorie elliptique ou le parabolisme, on ſera porté à chercher une hypothêſe, qui rend les expreſſions des ſecteurs plus ſimples. Or il eſt certain qu'en ſuppoſant la trajectoire rectiligne, on pourra repréſenter les ſecteurs comme des triangles & les temps proportionels aux

parties de la ligne droite, qu'on ſuppoſe avoir été décrite uniformement par la Comète. Pour calculer dans cette hypothéſe, il faut employer des obſervations aſſès peu eloignées les unes des autres pour les embraſſer dans un court eſpace de temps, dans le quel le mouvement curviligne ſe ſera peu ecarté du mouvement rectiligne, afin que la tangente qui repréſente le mouvement rectiligne de la Comète ne s'éloigne pas beaucoup de la courbe. Comme cette hypothêſe ne repréſente pas la véritable orbite de la Comète, mais qu'elle ne fournit que des moyens d'abréger les calculs & qu'il n'en dérivent que des réſultats à-peu-près vrais, la méthode directe fondée ſur cette ſuppoſition ne pourra être qu' approchée. Au moyen d'une telle hypothêſe on n'achevera pas le calcul des éléments de l'orbite par une *ſeule opération*; il faudra enſuite recourir à une autre *méthode qui ſoit propre* à déterminer exactement les éléments de l'orbite qui etoient à-peu-près vrais. Voilà donc la route que nous ſerons obligés de ſuivre, n'ayant pu faire uſage de la voye directe & rigoureuſe.

§. 13. Nous employerons les mêmes équations dont nous avons fait uſage dans les deux articles précédens. Les équations II, IV, VI, (§. 2. 3. 4.) étant indépendantes d'aucune hypothêſe ne changent pas. Les autres équations doivent être adaptées à l'hypothêſe préſente, parcequ'elles contiennent les rayons vecteurs de la Comète.

(*Fig.* 20.) Que la ligne ABC répréſente l'orbite *rectiligne* de la Comète, qui ſe trouve en A, B, C, du temps des trois obſervations; Abaiſſant les perpendiculaires Aa, Bb, Cc ſur le plan de l'ecliptique, les lignes AS, BS, CS repréſenteront les diſtance vrayes de la Comète au ſoleil, ou les quantités D, d, δ & les lignes aS, bS, cS ſeront les diſtances racourcies. Tirant de S la perpendiculaire $SP = \pi$ ſur AC, & nommant l'angle PSN, que fait la plus courte diſtance avec la ligne des noeuds, P; & déſignant comme auparavant les angles ASN, BSN, CSN, par N, n, v, il aura $D = \frac{\pi}{\cos(P-N)}$ & $d = \frac{\pi}{\cos(P-n)}$ & $\delta = \frac{\pi}{\cos(P-v)}$

Subſtituant ces valeurs au lieu de D, d, δ dans les équations I, III, V, des §. 2, 3, 4. on aura.

I.) $\pi \sin N (\sin I \sin (U+T) - \operatorname{tang} G \cos I) = A \sin U \operatorname{tang} G \cos (P-N)$

III.) $\pi \sin n\ (\sin I \sin (U-p+t) - \operatorname{tang} g \cos I) = a \sin (U-p) \operatorname{tang} g \cos (P-n)$

V.) π ſin v (ſin I ſin $(U - q + \theta)$ — tang γ cos I) = ſin $(U - q)$ tang γ cos $(P - v)$

J'ai dit que les équations II, IV, VI. reſtent inaltérables. Pour former la ſeptiéme équation, il faut remarquer que les temps R & r ſont proportionels aux aires des ſecteurs ou des triangles $A\,S\,B$, & $B\,S\,C$, donc $\Delta\,A\,S\,B : \Delta\,A\,S\,C = \frac{D\,d}{2}$ ſin $(n - N)$: $\frac{d\,\delta}{2}$ ſin $(v - n) = R : r$, donc $R\,\delta$ ſin $(v - n) = D\,r$ ſin $(n - N)$, Enfin ſubſtituant pour D & δ les valeurs que nous venons de leur trouver, on aura l'équation VII. $\frac{R \text{ ſin } (N - n)}{\cos (P - v)} = \frac{r \text{ ſin } (n - N)}{\cos (P - N)}$. Voilà donc ſept inconnues, ſcavoir π, P, I, U, N, n & v, & ſept équations, donc le problême eſt determiné.

§. 14. Pour éliminer plus facilement les *ſept inconnues, on fera bien de réduire* la trajectoire rectiligne à l'ecliptique. Parceque les triangles $A\,S\,B$, $A\,S\,C$ ſont en raiſon des temps on aura $A\,B : B\,C = R : r$, mais à cauſe des lignes perpendiculaires $A\,a$, $B\,b$, $C\,c$, on a $A\,B : B\,C = a\,b : b\,c = R : r = \Delta\,a\,S\,b : \Delta\,b\,S\,c$.

Abaiſſant (*Fig.* 19.) de S la perpendiculaire $S\,\pi = \nu$ ſur l'orbite réduite $a\,c$, & déſignant les angles $N\,S\,a$, $N\,S\,b$, & $N\,S\,c$ par B, b, & β, on aura $S\,a = \frac{\nu}{\cos (P - B)} = \frac{S\,T \text{ ſin } T}{\text{ſin } S\,a\,T} = \frac{A \text{ ſin } T}{\text{ſin } (U + B + T)}$, nommant l'angle $\pi\,S\,N$, P, on aura l'équation I.) $\frac{A \text{ ſin } T}{\text{ſin } (U + B + T)} = \frac{\nu}{\cos (P - B)}$. On formera de la même maniere l'équation III. $\frac{a \text{ ſin } t}{\text{ſin } (U - p + b + t)} = \frac{\nu}{\cos (P - b)}$ & l'équation V. ſera $\frac{\alpha \text{ ſin } \theta}{\text{ſin } (U - q + \beta + \theta)} = \frac{\nu}{\cos (P - \beta)}$.

Il eſt prouvé dans le §. 2. que tang $c\,S\,N = \frac{\text{tang } G \text{ ſin } U}{\text{tang } I \text{ ſin } T - \text{tang } G \cos U}$, où l'angle $c\,S\,N$ ſe rapporte aux angles B, b, β, donc déſignant $\frac{\text{ſin } T}{\text{tang } G}$ par f, &

$\frac{\text{fin } t}{\text{tang } g}$ par g, & $\frac{\text{fin } \theta}{\text{tang } \gamma}$ par b, on obtiendra les trois équations fuivantes, favoir l'équation II. tan $B = \frac{\text{fin } U}{f \text{ tang } I - \cos U}$, l'équation IV. tang $b = \frac{\text{fin } (U-p)}{g \text{ tang } I - \cos (U-p)}$ & l'équation V. tang $\beta = \frac{\text{fin } (U-q)}{b \text{ tang } I - \cos (U-q)}$. Enfin on aura l'équation VII. $\frac{R \text{ fin } (B-b)}{\cos (P-\beta)} = \frac{r \text{ fin } (b-B)}{\cos (P-B)}$ §. 13.

On peut féparer les fept inconnues P, I, U, v, B, b & β, moyennenant les fept équations précédentes. Mais quoique les équations foyent très fimples, & j'ofe dire plus fimples que celles que *M. Du Séjour* a employées dans fon *Esfai fur les Comètes* page 272. Cependant par leurs combinaifons elles donnent des formules extrêmement compliquées, ou les inconnues font du fecond & du troifieme degré. Or s'il arrive que les racines des équations font póffibles, il faudra faire le calcul de l'orbite féparément pour chaque racine, afin de décider la quelles des trois racines eft probablement la plus exacte. Mais quel Aftronome voudroit entreprendre un ouvrage fi pénible, *dont le fuccès eft d'ailleurs très douteux?* Pour me conformer aux conditions du Programme publié par *l'illuftre Académie des fciences*, j'ai cru devoir quiter la route que j'ai fuivie jusqu'ici. Je m'en fuis fait une autre route plus facile à fuivre. J'aurai l'honneur de préfenter à mes juges éclairés deux méthôdes d'approximation, fondées fur la trajectoire rectiligne.

§. 15. Voici en peu de mots le procedé de la premiere méthôde. *Si l'on peut déterminer exactement les rapports de trois diftances de la Comète à la terre*, je dis *qu'on peut déterminer rigoureufement l'orbite de la Comète.* (*Fig.* 17.)

Suppofons que la ligne des noeuds $S\ N$ fe trouve entre la Comète C & la terre T. Soit $NST = U$, qui eft l'angle compris entre la ligne des noeuds & le rayon vecteur de la terre. L'angle à la terre STc eft $= T$. La Comète eft en C. Abaisfant du lieu C la perpendiculaire $C\ c$ fur le plan de l'écliptique, la ligne cT eft la diftance racourcie de la Comète à la terre. Tirant de C la perpendiculaire, $C\ I$ fur la ligne des noeuds & menant $c\ I$, l'angle $C\ I\ c = I$ détermine l'inclinaifon de l'orbite.

La diſtance $C\ S$ eſt $= a$. On aura donc $x\,T = a\,\frac{\text{ſin } U}{\text{ſin } (U+T)}$ & $x\,c = \frac{c\ I}{\text{ſin } (U+T)}$, mais $c\ I = \frac{c\ T \text{ tang } G}{\text{tang } I}$ (§. 1.) donc $x\,c = \frac{c\ T \text{ tang } G}{\text{tang } I \text{ ſin } (U+T)}$, déſignant par G la latitude géocentrique. Or $c\ T = x\,c + x\,T = \frac{c\ T \text{ tang } G}{\text{tang } I \text{ ſin } (U+T)} + \frac{a \text{ ſin } U}{\text{ſin } (U+T)}$, donc $c\ T = \frac{a \text{ ſin } U \text{ tang } I}{\text{tang } I \text{ ſin } (U+T) - \text{tang } G}$.

Pour la ſeconde *obſervation ſuppoſons* que la terre en t s'approche de la ligne des noeuds, & ſoit $T\ S\ t = m =$ au mouvement de la terre, dans l'intervalle des deux obſervations, on aura $N\ S\ t = U - m$, ſoit $S\ t = b$, & l'angle $d\ t\ S = t$ & $t - n = p$, ſoit $g =$ *la longitude géocentrique*, on trouvera $d\ t = \frac{b \text{ ſin } (U-m) \text{ tang } I}{\text{tang } I \text{ ſin } (U+p) - \text{tang } g}$.

Pour la troiſieme obſervation, l'angle U ſera $= U - n$, & l'angle $T = \theta$, & la latitude géocentrique $= \gamma$, & la diſtance $S\,e = c$, enfin ſoit $\theta - n = q$, on aura, $e\ \theta = \frac{c \text{ ſin } (U-n) \text{ tang } I}{\text{tang } I \text{ ſin } (U+q) - \text{tang } \gamma}$.

Le rapport donné entre la premiere & la ſeconde diſtance de la Comète à la terre, ou bien $\frac{c\ T}{d\ t}$ ſoit $= \alpha$, & poſant $\frac{a}{b} = f$, & diviſant *la* premiere équation par la ſeconde, il viendra *l'équation* A),

$$\alpha = \frac{f \text{ ſin } U \ (\text{tang } I \text{ ſin } (U+p) - \text{tang } g)}{\text{ſin } (U-m) \ (\text{tang } I \text{ ſin } (U+T) - \text{tang } G)}.$$

Enfin exprimant par β le rapport entre la premiere & la troiſieme diſtance de la Comète à la terre, & deſignant $\frac{a}{c}$ par h, & diviſant la premiere équation par la troiſieme, on aura l'équation B) $\beta = h\,\frac{\text{ſin } U \ (\text{tang } I \text{ ſin } (U+q) - \text{tang } \gamma)}{\text{ſin } (U-n) \ (\text{tang } I \text{ ſin } (U+T) - \text{tang } G)}$

Des

Des équations A & B, je déduis l'équation

$$\text{tang } I = \frac{\alpha \sin(U-m) \text{ tang } G - f \sin U \text{ tang } g}{\alpha \sin(U-m) \sin(T+U) - f \sin U \sin(U+p)} = \frac{\beta \sin(U-n) \text{ tang } G - h \sin U \text{ tang } \gamma}{\beta \sin(U-n) \sin(T+U) - h \sin U \sin(U+q)}$$

Exprimant ſin $(U-m)$ par ſin U cos m — cos U ſin m, & ſin $(T+U)$ & ſin $(U+p)$ &c. par de ſemblables formules, & introduiſant les cotangentes ou les tangentes de U au lieu des ſin U & cos U, on trouvera

$$\frac{\alpha \text{ tang } G \cos m - \alpha \text{ tang } G \sin m \cot U - f \text{ tang } g}{(\alpha \cos m - \alpha \cot U \sin m)(\cot U \sin T + \cot T) - f \sin p \cot U - f \cos p} =$$
$$\frac{\beta \cot n \text{ tang } G - \beta \sin n \cot U \text{ tang } G - h \text{ tang } \gamma}{(\beta \cos n - \beta \sin n \cot U)(\sin T \cot U + \cot T) - h \sin q \cot U - h \cos q}$$

~~D'où j'ai déduit, tang U =~~ $-\frac{M}{2H} \pm \sqrt{\left\{\frac{M^2}{4H^2} - \frac{L}{M}\right\}}$, lors que M eſt $= f\beta(\text{tang } G \sin(p-n) - \text{tang } g \sin(T-n)) + hf(\sin q \text{ tang } g - \sin p \text{ tang } \gamma) + \alpha h(\text{tang } \gamma \sin(T-m) - \text{tang } G \sin(q-m))$.

Et $L = \beta f \sin n (\text{tang } g \sin T - \text{tang } G \sin p) + \alpha h \sin m (\text{tang } G \sin q - \sin T \text{ tang } \gamma)$.

Et $H = \alpha h \cos m (\cos T \text{ tang } \gamma - \cos q \text{ tang } G) + hf(\cos q \text{ tang } g - \text{tang } \gamma \cos p) + \beta f \cos m (\text{tang } G \cos p - \text{tang } g \cos T)$.

§. 16. Ayant trouvé l'angle U, on connoîtra l'angle I au moyen de l'expreſſion de tang I.

2.) On calculera deux diſtances racourcies de la Comète à la terre, qui ſont les plus éloignées, à l'aide des expreſſions de $c\,T$ & de $c\,\theta$.

3.) On connoîtra donc dans les triangles $S\,c\,T$, les deux cotés $S\,T$ & $c\,T$ avec l'angle compris T, donc poſant $\frac{S\,T}{c\,T} = \text{tang } \varepsilon$, ſi $S\,T$ eſt $> c\,T$, on aura

$$\text{tang}\left\{\frac{S\,c\,T - c\,S\,T}{2}\right\} = \text{tang}(\varepsilon - 45^\circ) \text{ tang}\left\{90 - \frac{T}{2}\right\},$$

donc on connoîtra l'angle au ſoleil $c\,S\,T$, partant la longitude heliocentrique de la Comète.

De la même maniere l'on determinera l'angle au ſoleil & la longitude héliocentrique de la Comète pour la troiſieme obſervation.

4.) On cherchera deux diſtances racourcies de la Comète au ſoleil à l'aide de l'expreſſion $S\,c = \frac{c\,T \text{ ſin } T}{\text{ſin } c\,S\,T}$.

5.) Les latitudes héliocentriques ſe déterminent par les formules, tang. latit. hélioc. $= \frac{c\,T \text{ tan } G}{c\,S} = \text{tang } A\,L$. (*Fig.* 22.)

6.) Dans le triangle ſphérique $L\,A\,N$, on connoît l'angle d'inclinaiſon $L\,N\,A =$ I & la latitude héliocentrique $L\,A$, donc *ſin* $A\,N = \frac{\text{tang } A\,L}{\text{tang } I} = \frac{c\,T \text{ tang G}}{c\,S.\ \text{tang} I}$ (Nro 5.), donc *la longitude* du noeud ſera connue, parce qu'on connoît la longitude héliocentrique de la Comète.

7.) L'on connoîtra auſſi le lieu du noeud dans l'orbite, car ſin $L\,N = \frac{\text{ſin } A\,L}{\text{ſin } I}$.

8.) On trouvera la diſtance de la Comète au noeud pour l'obſervation ſuivante, parceque *ſin* $l'\,N = \frac{\text{ſin } a\,l'}{\text{ſin } I}$, la Comète étant en l'.

9.) Donc l'on connoîtra l'arc $L\,l = N\,l - N\,L$, qui détermine l'angle $C\,S\,E$ compris entre les deux rayons vecteurs $C\,S$, $E\,S$ de la Comète.

10.) Les rayons vecteurs $C\,S$ ont pour expreſſion $c\,S$: cos latit. héliocentrique (*Fig.* 17).

11.) Soit $P\,S = p =$ la diſtance périhélie, l'angle $P\,S\,E = \phi$, & l'angle $P\,S\,C = \phi + \pi$, enſorte que π exprime *l'angle compris* $C\,S\,E$ (Nro 9). Or par les propriétés de la parabole, il y aura $S\,C$ ou $D = p :$ cos $\left\{\frac{\phi + \pi}{2}\right\}^2$ & $S\,E$ ou $\delta = p : \left\{\cos \frac{\phi}{2}\right\}^2$, donc $\sqrt{\frac{\delta}{D}} = \frac{\cos \frac{\phi + \pi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - \text{tang } \frac{\phi}{2} \text{ ſin } \frac{\pi}{2}$.

donc $\mathrm{tang}\,\frac{\phi}{2} = \cot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{\frac{\delta}{D}}$. Mais l'angle ϕ ou PSE détermine le lieu du périhélie.

12.) On connoîtra donc la distance périhélie $p = D\left\{\cos\frac{\phi}{2}\right\}^2$.

13.) Enfin l'on connoîtra le temps du passage de la Comète au périhélie, parceque l'on à déterminé le temps, dans le quel de secteur parabolique PSE a été decrit. Or ce temps a pour expression $\frac{t}{\pi}\,\frac{p\sqrt{p}}{2}\left\{\mathrm{tang}\frac{\phi}{2} + \frac{1}{3}\left(\mathrm{tang}\frac{\phi}{2}\right)^3\right\}$ §. 10.

§. 17. *Si l'on vouloit établir la théorie elliptique de la Comète*, on devroit calculer trois distances racourcies de la Comète à la terre, trois longitudes & trois latitudes héliocentriques, selon les (Nros 2—5) du §. 16. *Ensuite on calculeroit les deux angles compris entre deux à deux rayons vecteurs*, ou bien les arcs $Ll = \alpha$, ~~$L\lambda = \beta$ selon le Nro 9. Puis on détermineroit les trois rayons vecteurs~~ D, d, δ, selon le Nro. 10. Les numeros, qui suivent, souffrent quelques altérations.

11.) Soit $PSE = \phi$, les anomalies seront $PSD = \phi + \beta$, & $PSC = \phi + \alpha$.

Posant $b =$ au demi paramétre & $e =$ l'excentricité, on aura $D = b : (1 + e\cos\phi)$ & $d = b : (1 + e\cos(\phi + \alpha))$ & $\delta = b : (1 + e\cos(\phi + \beta))$. On déduira de ces trois équations l'anomalie $\phi = PSE$, qui aura pour expression, $\mathrm{tang}\,\phi =$

$$\frac{A\,(D - d)\,\delta\,\sin\frac{\beta}{2} - (D - \delta)\,d\,\sin\frac{\alpha}{2}}{(D - \delta)\,d\,\cos\frac{\alpha}{2} - A\,(D - d)\,\delta\,\cos\frac{\beta}{2}}$$

désignant A par $\sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\alpha}{2}$, donc le lieu du périhélie est déterminé.

12.) L'excentricité ou e s'exprimera par $\frac{D - d}{d\cos(\phi + \alpha) - D\cos\phi}$.

13.) Le demi-paramétre ou b sera $= D\,(1 + e\cos\phi) = d\,(1 + e\cos(\phi + \alpha))$ $=$ &c.

14.) La diſtance périhélie $P\,S = p = \frac{b}{1+e}$.

15.) Le demi-grand-axe, $a = \frac{p}{1-e} = \frac{b}{1-e^2}$.

16.) Le demi-petit-axe ou $c = b : \sqrt{(1-e^2)}$.

17.) La diſtance du foyer au centre, ou $f = a\,e$.

18.) Le temps périodique de la Comète, exprimé en années, ſe définit par $a\sqrt{a}$.

19.) Enfin le temps dans lequel la Comète aura parcouru le ſecteur $P\,S\,A$ ou bien R sera $= \frac{\epsilon\,a\,c}{2\pi\sqrt{b}}\left\{\frac{\pi}{2} - \text{Arc fin}\left(e - \frac{D\cos\phi}{a}\right)\right\} - \frac{\epsilon\,f}{2\pi\sqrt{b}}\,\text{fin}\,\phi$ §. 5, 6. où il faut remarquer que l'angle ϕ, dénote le ſupplement de l'anomalie vraye, ſi elle eſt plus grande que 90 degrés. Or ce temps étant trouvé, on ſaura le temps du pasſage de la Comète au périhélie.

§. 18. Les formules que nous avons trouvées, pour la détermination des angles I & U, ne ſont pas asſès compliquées pour rebuter les Aſtronomes d'en faire uſage. Cependant les Aſtronomes rencontreront peut-être dans la pratique du calcul des inconvéniens qui viennent de la ſituation douteuſe de la ligne des noeuds, & qui rendront douteux l'uſage de nos formules. J'en ai dit quelque choſe a l'entrée de cette disſertation. Je ferai voir en quoi conſiſtent les inconveniens dont je viens de parler, & j'indiquerai les moyens d'y remédier. J'ai dreſſé les formules des diſtances de la Comète à la terre, en ſuppoſant que la ligne des noeuds eſt entre la Cométe & la terre, & que la terre s'approche du noeud dont la Comète eſt plus proche. J'ai trouvé $c\,T = \frac{a\,\text{fin}\,U\,\text{tang}\,I}{\text{tang}\,I\,\text{fin}\,(U+T) - \text{tang}\,G}$ &.

$$\text{tang}\,I = \frac{\alpha\,\text{fin}\,(U-m)\,\text{tang}\,G - f\,\text{fin}\,U\,\text{tang}\,g}{\alpha\,\text{fin}\,(U-m)\,\text{fin}\,(T+U) - f\,\text{fin}\,U\,\text{fin}\,(U+p)}.$$

2.) Mais ſi la terre ſe trouvoit entre la ligne des noeuds & la Comète, il y auroit

$$Tc = cx - xT, \text{ donc } Tc = \frac{a \sin U \tang I}{\tang G - \tang I \sin (U + T)}.$$

$$\& \tang I = \frac{\alpha \sin (U-m) \tang G - f \sin U \tang g}{\alpha \sin (U-m) \sin (T+U) - f \sin U \sin (U+p)}$$

3.) Enfin ſi la Comète ſe trouvoit entre la ligne des noeuds & la terre, on auroit

$$T c = \frac{a \sin U \tang I}{\tang I \sin (U-T) + \tang G}$$

$$\& \tang I = - \frac{\alpha \sin (U-m) \tang G - f \sin U \tang g}{\alpha \sin (U-m) \sin (T+U) - f \sin U \sin (U+p)}$$

Dans ces trois différentes poſitions de la terre, de la Comète & de la ligne des noeuds, l'expresſion de tang U ne ſouffre aucune altération, mais les expreſſions des diſtances de la Comète à la terre ne ſont pas les mêmes. Les formule de la tang I acquiert le ſigne contraire dans le troiſieme cas.

Mais ſi la terre alloit en s'éloignant de la ligne des noeuds, il faudroit mettre par tout $U + m$ & $U + n$ au lieu de $U - m$ & de $U - n$, & il faudroit écrire $p = t + m$ & $q = \theta + n$.

Enfin il faudroit prendre la valeur de L en ſens contraire, ſcavoir $L = \beta f \sin n$ $(\sin p \tang G - \tang g \sin T) + \alpha b \sin m (\sin T \tang \gamma - \tang G \sin q)$ §. 15.

Il ſera toujours facile de voir, ſi la terre s'approche où s'éloigne du noeud, qu'on choiſit, faiſant attention à la poſition & à la marche de la terre & de la Comète & aux accroiſſements, ou aux décroisſements des latitudes de la Comète.

Suppoſons, qu'on ne puiſſe pas déterminer la poſition de la ligne des noeuds par rapport à la Comète & à la terre moyennant les obſervations, on pourra d'abord ſuppoſer, comme dans le premier cas, que la ligne des noeuds ſe trouve entre la terre & la Comète. Parceque la tangente de U conſerve la même valeur dans les trois cas, on ſubſtituera une des deux racines de tang U, dans l'expreſſion de tang I.

1.) Si la valeur réſultante de tang I eſt négative, la Comète ſe trouvera entre la ligne des noeuds & la terre comme dans le 3me cas.

2.) Mais ſi la valeur réſultante de tang I eſt poſitive, la Comète pourra ſe trouver dans le 1r & dans le 2d. cas. C'eſt pourquoi il faudra calculer la diſtance de la Comète à la terre, ou bien on verra ſi tang $I \sin (U+T)$ eſt $>$ ou $<$ tang G, pour avoir l'expreſſion de $c T$, afin de diſcerner le premier cas du ſecond.

La manière de déterminer la position de la ligne des noeuds ne feroit pas embarassante, si l'équation de tang U ne fournisfoit pas deux racines, qu'il faudra substituer l'une après l'autre dans l'expression de tang I, pour choisir la racine, qui remplit toutes les conditions du problême. Outre les regles que nous venons de prescrire, il faudra calculer deux distances de la Comète à la terre, conformement aux résultats des tang I & tang U, qui viennent de chacune des deux racines.

Or on peut juger par les obsérvations, si la Comète va en s'éloignant ou en s'approchant de la terre, selon que le mouvement de la Comète se rallentit ou s'accélere, par conséquent il faudra choisir la position de la ligne des noeuds, la quelle détermine les rapports des deux distances calculées $c\ T$ & $d\ t$ conformément aux observations du mouvement de la Comète. Au reste les expressions des distances $c\ T$ qui correspondent *aux trois cas mentionnés*, font telles que les mêmes rapports entre ces distances ne peuvent pas en résulter, ce que les diviseurs de ces mêmes expresſions *démontrent à l'oeil.*

Mais on pourra beaucoup abréger *toutes ces recherches, si l'on employe pour* T un angle obtus ou qui n'est pas beaucoup plus petit qu'un angle droit, alors l'angle U devroit être aigu. Or l'une des deux racines de *l'équation* de tang U, sera positive, & l'autre négative. Ou bien si les *deux racines étoient positives*, les deux angles U différeroient *pourtant beaucoup* entre eux, ensorte qu'il faudra exclure le plus *grand des deux angles.*

§. 19. Si l'on fait à-peu-près le temps que la Comète a passé par *un des noeuds, on pourra* trouver la position de la ligne des noeuds par rapport à la Comète & à la terre, & par conséquent on pourra s'épargner la peine de déterminer la situation de la ligne des noeuds selon les régles établies dans l'article précédent. On déterminera donc grossierrement le temps du passage de la Comète par un des noeuds, dont elle est la plus proche. Je prendrai pour *exemple* la Comète de 1769, à la quelle j'appliquerai tout ce que *j'aurai à dire.*

Cette Comète a été obfervée la premiere fois par M. *Mesſier* le 8 Aout, 11^h, à $1^s\ 5'$ de longitude & à la latitude australe de $1°\ 26'$. Elle étoit donc proche du noeud déscendant. Le 14 Août, la longitude *étoit* de $1^s\ 9°$ avec une latitude de $3°\ 9'$. La Comète avoit donc pasfé la ligne des noeuds, & son mouvement étoit direct. Comme la Comète étoit proche du noeud, je ne me ferverai pas de la méthôde des interpolations, employant les fecondes & les troisiemes différences pour déterminer le temps du pasfage de la Comète par la ligne des noeuds; j'inférerai

simplement, comme la différence en latitude ou $1°\,43'$ est à 6 jours $= 1°\,26' : 5$ jours, donc la Comète aura passé par le noeud entre le second & le premier d'Août; ayant la longitude de $1^s\,2°$, lors que le lieu de la terre étoit en $10^s\,10°$. Je décris un cercle au centre duquel est le soleil. (*Fig.* 21.) La ligne VA aboutit au commencement du bélier. Le cercle intérieur représente l'orbite de la terre. Je place la terre en T, ensorte que l'angle VSL aboutisse à la longitude de $10^s\,10°$. Je tire TE paralléle à VA, & je fais l'angle $ETF = 1^s\,2° = 32°$. Il faut donc que la Comète se soit trouvée quelque part en c sur le rayon visuel TF, par conséquent la ligne NcS *indiquera* la position de la ligne des noeuds. Mais la Comète étant directe, elle poursuivra sa route vers $C\gamma$, tandisque que la terre ira selon $Tt\theta$, d'où il s'ensuit; 1.) que la ligne des noeuds se trouve entre la Comète & la terre vers le 14. *d'Aout*, & 2.) *que la terre s'est approchée* de la ligne des noeuds.

§. 20. Il est clair que la route que nous avons tenue, est directe, & qu'elle *conduiroit à une méthode* rigoureuse, si l'on pouvoit démontrer rigoureusement la supposition sur la quelle nous avons fondé la solution de nôtre problème; c'est-à-dire si l'on pouvoit *déterminer rigoureusement les rapports entre les trois distances de la Comète à la terre.* N'ayant pu trouver une expression rigoureuse de ces rapports, j'ai dû me contenter des recherches approchantes du vray. C'est pour quoy ma méthôde est directe, *mais* approchée. J'aurai encore recours à l'hypothêse de la trajectoire rectiligne pour établir les rapports approchés des distances de la Comète à la terre. Les lignes droites ABC, $Tt\theta$ (*Fig.* 23.) réprésentent les portions des trajectoires rectilignes de la Comète & de la terre, parcourrues en temps égaux, en sorte que la Comète & la terre se soyent trouvées en même temps en A & T, en B & t, en C & θ. Transportant le mouvement de la terre en sens contraire à la Comète, l'on pourra considérer le mouvement de la Comète, comme étant vu de la terre immobile. Je fais donc AL paralléle & égale à $T\theta$, & j'acheverai le parallélogramme $AL\gamma C$; il est évident que la terre immobile en T verroit aller la Comète le long de la diagonale $A\gamma$, que la Comète, qui étoit réellement en C, paroitroit en γ. Je désignerai par R le temps pendant lequel les deux astres ont parcouru les lignes AB & Tt, & je marquerai par r; le temps ou les espaces BC & $t\theta$, sont décrits. Je menerai $B\beta$ paralléle à AL ou à $T\theta$; donc $R : R + r = AB : AC = Tt : T\theta = B\beta : C\gamma$, or $C\gamma = T\theta$, donc $Tt = B\beta$; par conséquent $B\beta Tt$ & $C\gamma T\theta$ sont des parallé-

logrammes, donc $B\,t = \beta\,T$, & $C\,\theta = \gamma\,T$. D'où il s'enſuit que les diſtances de la Comète à la terre, $A\,T$, $B\,t$, $C\,\theta$ ne ſouffrent aucune altération, en ſubſtituant l'orbite relative $A\,\gamma$ au lieu de l'orbite vraye $A\,C$, & ſuppoſant la terre immobile en T.

Or l'angle $\beta\,T\,A = \beta\,T\,o$ ou $B\,t\,o - A\,T\,o =$ à la différence des longitudes géocentriques de la Comète du temps de la premiere & de la ſeconde obſervation. De même $\gamma\,T\,\beta = \gamma\,T\,o$ ou $C\,\theta\,o - \beta\,T\,o =$ à la différence des longitudes de la Comète à la ſeconde & la troiſieme obſervation. Parceque $A\,B : B\,C = A\,\beta : \beta\,\gamma = R : r = \Delta\,A\,T\,\beta : \Delta\,\beta\,T\,\gamma = \frac{A\,T.\ T\beta}{2}$ ſin $A\,T\,\beta : \frac{T\beta.\ \gamma\,T}{2}$ ſin $\gamma\,T\,\beta$, il y aura $\gamma\,T = A\,T\,\frac{r\ \text{ſin}\ A\,T\,\beta}{R\ \text{ſin}\ \gamma\,T\,\beta}$. *Faiſant donc la premiere* $A\,T =$ 10000 ou $= 1$, *on trouvera la troiſieme diſtance* $\gamma\,T$, ou plutôt on trouvera le rapport entre ces deux diſtances, ſçavoir $\frac{A\,T}{\gamma\,T} = \frac{R\ \text{ſin}\ \gamma\,T\,\beta}{r\ \text{ſin}\ A\,T\,\beta}$. Pour approcher le plus près du vrai rapport des diſtances moyennant la formule que nous venons de former, il conviendra de l'appliquer à des obſervations peu éloignées entr' elles. Mais comme l'on ne pourra pas bien établir la théorie d'une Comète ſur des obſervations trop proches l'une de l'autre, l'on cherchera les rapports des trois diſtances à pluſieurs repriſes, continuant le calcul de nôtre formule presque d'un jour a l'autre. Si l'on vouloit établir la théorie de la Comète de 1769, ſur les obſervations du 14, 23 & 27 Août, l'on pourroit commencer par chercher les diſtances de la Comète à la terre pour le 14, 15, 16 Août, poſant celle du *14me* ou $A\,T = 1$.

Le 14 Aout $12^h\,34'\,13''$	Longitudes	*Le 15 Aout* $15^h\,41'\,12''$	Longitudes
15 — $15^h\,41'\,12''$	$1^s\ 9°\,58'\,47''$	16 — $12^h\ 1'\,44''$	$1^s\ 10°\,48'\,54''$
	$1^s\ 10°\,48'\,54''$		$1^s\ 11°\,34'\ 6''$
$R = 27^h,\ 116$		$r = 20^h,\ 342$	
	$AT\beta = 50'\ 7''$		$\beta T\gamma = 45'\,12''$

log. r = 1,3083723	log. R = 1,4332256
log. ſin $AT\beta$ = 8,1636929	log. ſin $\beta\,T\,\gamma$ = 8,1188520
log. r ſin $A\,T\beta$ = 9,4720652	9,5520776
log. R ſin $\beta\,T\gamma$ = 9,5520776	

9,9199876 = log. $\gamma\,T$ ou log. de la diſtance pour le 16 Août.

Je

Je continue le calcul pour les obſervations du 16, 20 & 21 d'Août, poſant log. $AT = 9{,}9199876$, dont la diſtance répondoit à l'obſervation du 16 d'Août. Ils ne ſe trouvent pas d'obſervations entre le 16 & le 20, dans le recueil des obſervations, que M. *Euler a* mis à la tête de ſes *recherches ſur la Comète de* 1769.

	Longitudes
Le 16 Aout, 12h 1′ 44″	1s 11° 34′ 6″
20 — 15h 21′ 22″	1s 15° 58′ 38″
$R = 99^h, 326$	$AT\beta = 4° 24' 32''$

	Longitudes
Le 20 Aout 15h 21′ 22″	1s 15° 58′ 38″
21 — 13h, 4′ 55″	1s 17° 1′ 33″
$r = 21^h, 725$	$\beta T\gamma = 1° 2' 55''$

$$\begin{aligned} \text{Log. } r &= 1{,}3369598 \\ \text{log. ſin } AT\beta &= 8{,}8857778 \\ \text{log. } AT &= 9{,}9199876 \\ \hline & 0{,}1427252 \\ & 0{,}2594154 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{log. } R &= 1{,}9970629 \\ \text{log. ſin } \beta T\gamma &= 8{,}2623525 \\ \hline & 0{,}2594154 \end{aligned}$$

log. $T\gamma = 9{,}8833098$, qui eſt le log. de la diſtance laquelle répond à l'obſervation du 21 Aout.

Poſant la diſtance du 21, comme une premiére diſtance AT, je combinerai les obſervations du 21, 22 & 23 pour en déduire celle du 23 d'Août.

	Longitudes		Longitudes
Le 21 Août 13h 4′ 55″	1s 17° 1′ 33″	22 Août 12h 29′ 26″	1s 18° 18′ 24″
Le 22 — 12h 29′ 26″	1s 18° 18′ 24″	23 — 12h 17′ 1″	1s 19° 43′ 15″
$R = 23^h 409$	$AT\beta = 1° 16' 51''$	$r = 23^h,798$	$\beta T\gamma = 1° 24' 51''$

$$\begin{aligned} \text{Log. } r &= 1{,}3765405 \\ \text{log. ſin } AT\beta &= 8{,}3493338 \\ \text{log. } AT &= 9{,}8833096 \\ \hline & 9{,}6091839 \\ & 9{,}7617162 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L.\ R &= 1{,}3693829 \\ \text{log. ſin } \beta T\gamma &= 8{,}3923339 \\ \hline & 9{,}7617168 \end{aligned}$$

log. $T\gamma = 9{,}8474677$, qui eſt le log. de la diſtance pour l'obſervation du 23 d'Août.

Donc le logarithme du rapport entre les diſtances de la Comète à la terre pour le 14 & le 23 d'Août, ou bien log. $AT : T\gamma$ ſera $= 0{,}1525322 =$ log. α. (§. 15.)

Pour déterminer les rapports des diſtances pour le 14 & le 27 du mois; Je commencerai par combiner les obſervations du 23, 25, 26 d'Août, qui ſont les plus proches.

	Longitudes
Le 23 Août $12^h 11' 1''$	$1^s 19° 43' 15''$
25 — $12^h 5' 50''$	$1^s 22° 52' 3''$
$R = 48^h, 816$	$AT\beta = 3° 8' 48''$
	Longitudes
le 25 Août $12^h 5' 56''$	$1^s 22° 52' 3''$
26 — $15^h 54' 14''$	$1^s 24° 56' 7''$
$r = 27^h, 805$	$\beta T\gamma = 2° 4' 4''$
log. r = 1,4441229	log. R = 1,6795732
log. $AT\beta$ = 8,7395100	log. ſin $\beta T\gamma$ = 8,5572866
log. AT = 8,8474677	
9,0311006	0,2368598
0,2368598	

log. $T\gamma = 9{,}7942408$, ce log. répond à la diſtance du 26 Août.

Ne connoiſſant pas la diſtance de la Comète à la terre pour le 25 d'Août, on ne pourra pas déduire la diſtance pour le 27 Août, de la combinaiſon des obſervations du 25, 26, 27 conformément à la méthode dont nous venons de faire uſage. Dans un cas pareil il faudra employer la formule que nous allons expoſer.

La Comète ſe trouve en A, β, γ, le 25, 26 & 27 d'Août, enſorte que log. $\beta T = 9{,}7942408$ & l'angle $AT\beta = 2° 4' 4''$ & le temps pour l'eſpace $A\beta$ ou $R = 27^h, 805$, de plus (*Fig.* 24.) $\beta T\gamma = 1^s 26° 36' 4'' - 1^s 24° 56' 7'' = 1° 39' 57''$ donc $AT\beta = 3° 44' 1''$ & le temps le long de l'eſpace $A\gamma = 48^h, 078 = R + r$. Abaiſſant des points β & γ les perpendiculaires βD, γE ſur AT, on aura $D\beta = \beta T$ ſin $AT\beta$. Mais $A\beta : A\gamma = R : R + r = D\beta : \gamma E$, donc $\gamma E = \frac{R+r}{R}$ βT ſin $AT\beta$, par conſéquent $\gamma T = \frac{E\gamma}{\text{ſin } AT\gamma} = \frac{R+r}{R} \times \frac{\beta T \text{ ſin } AT\beta}{\text{ſin } AT\gamma}$

log. ſin $AT\beta$ = 8,5572866	log. R = 1,4441229	
l. $(R+r)$ = 1,6819464	l. ſin $AT\gamma$ = 8,8136990	
log. βT = 9,7942408		
0,0334738	0,2578219	
0,2578219		

log. $T\gamma$ = 0,7756519, le log. de cette diſtance répond au 27e d'Août. D'où réſulte le log. du rapport entre les diſtances de la Comète pour le 14 & le 27 Août, ou log. β = 0,2243680.

Les rapports des diſtances ou les quantités α & β, déterminées par notre méthôde s'éloigneront de leurs exactes valeurs, lorsqu'elles auront été déduites des obſervations éloignées entr'elles de trois ou quatre jours, *& que le mouvement de la Comete n'a pas été à-peu-près uniforme*; par ces raiſons les rapports des diſtances que nous venons de trouver ne ſont pas bien exacts; auſſi n'en ferai-je aucun uſage pour *calculer les équations du §. 15.*

§. 21. Je me hâte de préſenter à *l'Académie Royale* la ſeconde méthôde directe & approchée, dont j'ai fait mention. Cette méthôde ſervira non ſeulement à faire trouver les rappors des trois diſtances de la Comète, mais auſſi elle fournira les diſtances mêmes ſi on les croit aſſés exactes. Il s'agit d'abord de s'orienter dans le calcul. Pour cet effet, on décrira un demicercle avec un rayon de trois à quatre pouces, La *ligne* VS aboutit au commencement du *bélier.* Je me ſervirai *des* trois obſervations du 14, 23, 27 d'Août. (*Fig.* 26)

		longit. de la terre.	longit. de la Comète.
le 14 Août	12h 34′ 13″	10s 22° 20′ 37″	1s 9° 48′ 47″ = L
le 23 ——	12h 17′ 1″	11s 1° 0′ 22″	1s 19° 43′ 15″ = l
27 ——	12h 10′ 40″	11 4° 52′ 19″	1s 26° 36′ 4″ = λ

Latit. auſtrales G = 3° 9′ 37″ q = 6° 18′ 19″ γ = 9° 38′ 13″.

Je place la terre en A, B, C, pour le temps des trois obſervations, enſorte que les angles VSA, VSB, VSC ſoient les ſupplémens des longitudes de la terre à la circonférence du cercle. Je fais donc l'angle VSA = 360° — 10s 22° 20′ = 37° 40′, & l'angle VSB = 29°, & l'angle VSC = 25°. Les ſix premiers ſignes ſont au deſſus de la ligne VO, mais les longitudes de la Comète ſe trouvent dans le premier ſigne de l'ecliptique, il faut donc que les rayons viſuels de la Comète $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ ſoivent dirigées vers la ligne VSO. Je fais donc les angles αAS, βBS,

γCS égaux aux différences entre les longitudes de la terre & de la Cométe.

Le 14 Août $\left| \begin{array}{l} L = 1^s\ 9^\circ 58' 47'' \\ S = 4^s 22^\circ 20' 37'' \end{array} \right|$ le 23 Août $\left| \begin{array}{l} l = 1^s 19^\circ 43' 15'' \\ ſ = 5^s 11^\circ\ 0'\ 22'' \end{array} \right.$

$T = \alpha AS = 102^\circ 21' 50''$ $\quad \beta BS = t = 101^\circ 17'\ 7''$

le 27 Août $\left| \begin{array}{l} \lambda = 1^s\ 26^\circ\ 36'\ 4'' \\ \sigma = 5^s\ \ 4^\circ\ 42'\ 19'' \end{array} \right.$

$\gamma CS = t = 98^\circ\ 16'\ 15''$

Pour éviter l'ambiguité des ſignes des quantités qui entrent dans les formules que nous allons expoſer, il faudra remarquer en quel ſens ſe coupent le premier & le ſecond rayon viſuel en a & c; ſi ces points d'interſection tombent au delà de la Cométe comme dans le cas préſent, ou entre la Cométe & la terre. Pour la même raiſon, il faut marquer les points d'interſections D, $ſ$, f, ou les rayons vecteurs du ſoleil coupent les rayons viſuels de la Cométe, en dehors ou en dedans de l'orbite de la terre, car l'on aura $AD = AS - SD$, ou $AD = SD - AS$.

Dans le triangle BSD, on connoit $BS = a$, les angles $DBS = 180^\circ - t$, & $BSA = m =$ au mouvement du ſoleil entre la premiere & la ſeconde obſervation, donc on aura

$$DS = \frac{b \text{ ſin } t}{\text{ſin } (t-m)}, \ \& \ AD = AS - DS = a - \frac{b \text{ ſin } t}{\text{ſin } (t-m)}.$$

L'angle $AaD = L - l = u$, & $ADa = 180^\circ - t + m$, donc le triangle AaD nous donne $Aa = \frac{AD \text{ ſin } (t-m)}{\text{ſin } u} = \frac{a \text{ ſin } (t-m)}{\text{ſin } u} - \frac{b \text{ ſin } t}{\text{ſin } u}$.

On pourra exprimer la ligne Aa d'une maniére plus commode pour le calcul, remarquant que $t = ſ - l$ & que $T = S - L$, donc $t - T = ſ - S + L - l$ $= m - u$, donc $t - m = T - u$, par conſéquent $Aa = \frac{a \text{ ſin } (T-u)}{\text{ſin } u} - \frac{b \text{ ſin } t}{\text{ſin } u}$.

2.) Le ſecond rayon vecteur de la terre SB rencontre le premier rayon viſuel en $ſ$ en dehors de l'orbite, donc $ſB = ſS - BS$. Or le triangle $ſSA$ nous fournit $ſS = \frac{a \text{ ſin } T}{\text{ſin } (T+m)}$, donc $ſB = \frac{a \text{ ſin } T}{\text{ſin } (T+m)} - b$. Puis par la réſolution du

triangle faB, on aura $Ba = \frac{fB \sin afS}{\sin faB} = \frac{a \sin T}{\sin u} - \frac{b \sin (T+m)}{\sin u}$, ou bien, à cause de $T+m = t+u$, on aura $Ba = \frac{a \sin T}{\sin u} - \frac{b \sin (t+u)}{\sin u}$.

3.) Faisant l'angle $ac\gamma = s =$ différence des longitudes de la Cométe à la premiere & troisiéme observation $= \lambda - L$ & faisant $CSA = n$, en prolongeant le rayon SC jusqu'à la rencontre du premier rayon visuel $A\alpha$ en σ, on aura $\sigma C = \sigma S - Sc = \frac{a \sin T}{\sin (T+n)} - c$, donc $Cc = \frac{a \sin T}{\sin s} - \frac{c \sin (T+n)}{\sin s}$,
ou bien $Cc = \frac{a \sin T}{\sin s} - \frac{c \sin (\theta + s)}{\sin s}$.

4.) *Au moyen du triangle* CeS, *on trouvera la ligne* $Se = \frac{c \sin \theta}{\sin (\theta + n)}$; la quelle se termine à la rencontre du rayon vecteur AS, & du rayon visuel, en dedans de l'orbite, donc $Ae = AS - Se = \frac{a \sin (T-s)}{\sin s} - \frac{c \sin \theta}{\sin s}$. Si ce point *e tomboit en dehors de l'orbite terrestre*, il y auroit $Ae = \frac{c \sin \theta}{\sin s} - \frac{a \sin (T-s)}{\sin s}$, ce qu'il faut remarquer par rapport aux points f, σ, D,.

§. 22. Avant que d'exposer la méthôde que j'ai en vue, je donnerai le calcul des lignes Aa, Ba, Cc, Ac.

$T = 102°21'50''$	$t = 101° 17' 7''$	$\theta = 98° 16' 15''$
$u = 9°44'28''$	$u = 9° 44' 28''$	$s = 16° 37' 17''$
$s = 16°37'17''$		
	$t+u = 111° 1' 35''$	$\theta+s = 114°53'32''$
$T-u = 92°37'22''$	log. a = 0,0052180	log. b = 0,0043940, l. c = 0,0039900
$T-s = 85°44'33''$		

log. a = 0,0052180	log. b = 0,0043940
l. sin $(T-u)$ = 9,9995448	l. sin t = 9,9915206
0,0047628	9,9959146
l. sin u = 9,2284007	l. sin u = 9,2284007
0,7763621	0,7675139

nombre	$= + 5,975332$	nombre	$= 5,854825$
	$= - 5,854825$		
Aa	$= 0,120507$		
log a	$= 0,0052180$	log b	$= 0,0043940$
l. sin T	$= 9,9898090$	l. sin $(t-u)$	$= 9,9700749$
	$9,9950270$		$9,9744689$
l. sin u	$= 9,2284007$	l. sin u	$= 9,2284007$
	$0,7666263$		$0,7460682$
nombre	$= 5,842870$	nombre	$= 5,572731$
	$5,572731$		
Ba	$= 0,270139$		
log. a sin T	$= 9,9950270$	log. c	$= 0,0039900$
l. sin s	$= 9,4564551$	l. sin $(\theta + s)$	$= 9,9576558$
	$0,5385719$		$9,9616458$
nombre	$= 3,455984$	l. sin s	$= 2,4564551$
	$3,200300$		$0,5051907$
Cc	$= 0,255684$	nombre	$= 3,200300$
log. a	$= 0,0052180$	log. c	$= 0,0039900$
l. sin $(T-s)$	$= 9,9987998$	l. sin θ	$= 9,9954593$
	$0,0040178$		$9,9994493$
l. sin s	$= 9,4564551$	l. sin s	$= 9,4564551$
	$0,5475627$		$0,5429942$
nombre	$= 3,528278$	nombre	$= 3,491355$
	$3,491355$		
Ac	$= 0,036923$		

donc $ac = Aa - Ac = 0,083584$. Il pourroit arriver que ac fût $= Ac - Aa$.

§. 23. Après avoir déterminé les lignes Aa, Ba, Ca, Cc, je ferai voir comment on pourra déterminer les distances de la Comète à la terre, dans l'hypothése du mouvement rectiligne. Soit $t = \beta a$, la distance de la Comète β au point d'intersection du premier & du second rayon visuel, ensorte que la seconde distance de la Comète à la terre ou $\beta B = x$, soit $= t - Ba$.

Il se présente d'abord une difficulté pour déterminer la situation du point β. Dans le cas présent il est facile de voir, que le lieu de la Comète doit être placé en β sur le rayon visuel $B\beta$, parceque le point a ne tombe pas entre β & B. Mais si le point d'intersection tomboit de l'autre coté de B, & que la ligne Ba fût longue, on pourroit douter si le lieu de la Comète est entre B & a ou au delà de a, en sorte que x pourroit être $= Ba - t$ ou $Ba + t$. Il faudra alors examiner si le mouvement de la Comète est retrograde ou direct conformément à l'observation, plaçant l'orbité entre les points B & a, ou au delà du point a.

Mettons donc $\alpha A = y$, & la troisiéme distance de la Comète a la terre ou $\gamma C = Z$, & conservons les dénominations des articles précédents. Qu'on abaisse des points γ & β les perpendiculaires γq & βr sur le premier rayon visuel αA, on aura $\beta r = t$ sin $a = t$ sin u & $ra = t$ cos $a = t$ cos u. De plus on aura $\alpha\beta : \alpha\gamma = R : R + r = \beta r : \gamma q$, donc $\gamma q = \frac{R+r}{R} \times t \sin u$, donc $\gamma c = \frac{\gamma q}{\sin c} = \frac{R+r}{R} \cdot \frac{t \sin u}{\sin s}$, par conséquent $Z = \frac{R+r}{R}, \frac{t \sin u}{\sin s} - Cc = \frac{R+r}{R} \times \frac{x \sin u}{\sin s}$ $\frac{R+r}{R} . Ba \frac{\sin u}{\sin s} - Cc$.

De plus à cause de $r\alpha = ra - \alpha a = ra - y - Aa$, & $q\alpha = qc - \alpha c = \gamma c . \cos s - y - Ac = \frac{R+r}{R} . \frac{t \sin u}{\sin s} . \alpha \operatorname{Cos} s - y - Ac$, mais $r\alpha : q\alpha = R : R + r = t \cos u - y - Aa : \frac{R+r}{R} \times \frac{t \sin u}{\sin s} . \operatorname{Cos} s - y - Ac$; d'où l'on déduit $y = \frac{R+r}{r} \left\{ \frac{t \sin (s-u)}{\sin s} - ac \right\} - Ac = \frac{R+r}{r} \times \left\{ \overline{x + Ba} \frac{\sin (s-u)}{\sin s} - ac \right\} - AC$.

Nous avons donc déterminé les trois distances de la Comète à la terre par une seule inconnue x. Egalant donc les expressions à celles que nous avons données §. 15., nous obtiendrons trois équations, au moyen des quelles nous pour-

rons déterminer les trois inconnues x, U & I. Nous aurons donc y ou

$$\left\{\overline{x+Ba}.\,\frac{\sin(s-u)}{\sin s}-ac\right\}\frac{R+r}{r}-Ac=\frac{a\sin U\tan I-\tan G}{\tan I\sin(u+T)}$$

$$\&\ x=\frac{b\sin(U-m)\tan I}{\tan I\sin(U+p)-\tan g}\ \&\ \text{enfin}$$

$$Z\ \text{ou}\ \frac{R+r}{R}(x+Ba)\frac{\sin U}{\sin s}-Cc=\frac{c\sin(U-h)\tan I}{\tan I\sin(U+q)-\tan\gamma}.$$

Mais parcequ'il résulteroit une équation du troisiéme dégré, de l'élimination des trois inconnues, j'ai cru abandonner la solution de ce probléme pour proposer des formules plus faciles à manier, afin de me conformer, autant que la difficulté de la matiére le permet, au programme de l'illustre Académie des Sciences.

§. 24. Qu'on érige trois perpendiculaires αG, βH, γI sur l'écliptique aux lieux réduits de la Comète en α, β, γ. (*Fig.* 25.) Qu'on fasse les angles $\alpha A G = G$, $\beta B H = g$, $\gamma C I = \gamma$, c'est-à-dire égaux aux *latitudes* géocentriques, on aura $\alpha G = y$ tang G, $\beta H = x$ tang g, & $\gamma I = z$ tang γ. Or ménant Gg, & Hh paralleles a l'orbite rectiligne $\alpha\beta\gamma$, il viendra $\alpha\beta : \beta\gamma = R : r = Hg : Ih = x$ tang $g - y$ tang G: z tang $\gamma - x$ tang g. Substituant donc pour y & z les valeurs que nous venons d'exprimer par x, §. 23, on *déterminera la seconde distance de la Comète* à la terre ou βB. Pour rendre l'expression de x moins compliquée, j'ai cherché une formule de $x+Ba$. Enfin supposant $\frac{\tan G}{\tan g}=M$, & $\frac{\tan\gamma}{\tan g}=N$, jai trouvé

$$x+Ba=Ba-\frac{M\left\{Aa-Ac.\frac{R}{R+r}\right\}-\frac{R}{R+r}.N.Cc}{\frac{1-M\sin(s-u)}{\sin s}-\frac{N\sin u}{\sin s}}$$

§. 25. Conformément aux trois formules, que j'ai exposées dans les deux articles précédents, je vais calculer les trois distances racourcies de la Comète à la terre, relativément aux observations du 14, 23 & 27 Août Les lignes Aa, Cc, Ba, Ac, ont été déterminées dans le §. 22. Les trois latitudes géocentriques sont

font marquées dans le §. 21. De plus il y a, $R = 215^h, 713$, $r = 95^h,898$ & $R + r = 311^h, 611$, $S - u = 6° 52' 49''$

$\log. R = 2,3338763$
$\log. (R+r) = 2,4936128$

$\log. \frac{R}{R+r} = 9,8402635$

$\log. \text{tang } G \approx 8,7420435$
$\text{L. tang. } g \approx 9,0873823$

$\log. M \approx 9,6546612$

$\text{l. tang } \gamma = 9,2304496$
$\text{l. tang } g = 9,0873823$

$\log. N = 0,1430673$

$\log. Ac = 8,5672970$
$\log. \frac{R}{R+r} = 9,8402635$

$8,4075605$
dont le nombre $= 0,025560$
$Aa = 0,120507$

$0,094947$
dont le log. $= 8,9774812$
$\log. M = 9,6546613$

$\text{l. } M \left\{ Aa - \frac{R.Ac}{R+r} \right\} = 8,6321425$

$\log. Cc = 9,4077038$
$\log. \frac{R}{R+r} = 9,8402635$
$\log. N = 0,1430673$

$9,3910346$
dont le nombre $= 0,246056$
$M \left\{ Aa - \frac{R.Ac}{R} \right\} = 0,042869$

$- 0,288925$
$Ba = 0,270139$

numerateur $= - 0,018786$

$\log \text{fin} (s-u) = 9,0784391$
$\log. M = 9,6546013$

$8,7331004$
$\log. S = 9,4564551$

$\log. \frac{M \text{ fin } (s-u)}{\text{fin } s} = 9,2766453$
~~log. N~~ $= 0,1430673$
$\log. \text{fin } u = 9,2284007$

$9,3714680$
$\log. \text{fin } s = 9,4564551$

$\log. \frac{N \text{ fin } u}{\text{fin } s} = 9,9150129$

$\frac{N. \text{fin } u}{\text{fin } s} = 0,822263$

$M \frac{\text{fin} (s-u)}{\text{fin } s} = 0,189080$

$- 1,011343$
$+ 1$

denominateur $= - 0,011343$
log. numerat. $= 8,2738343$
log. denom. $= 8,0547279$

$\log. (x + Ba) = 0,2191064$
$(x + Ba) = 1,656175$
$Ba = 0,270139$

$B\beta = x = 1,386036$

Calcul de la premiére diſtance $\alpha A = y$.

log. x =	0,2191064
log. $(s+u)$ =	9,0784391
	9,2975455
l. ſin s =	9,4564551
	9,8410904
nombre =	0,693570
ac =	0,083584
	0,609986
dont le log. =	9,7853199
log. $\frac{R+r}{r}$ =	0,5118033
	0,2971232
nombre =	1,982098
Ac =	0,036923
$\alpha A = y$ =	1,945175

Calcul de la troiſiéme diſtance $\gamma C = Z$.

log. x =	0,2191064
log. ſin u =	9,2284007
	9,4475071
log. ſin s =	9,4564551
	9,9910520
log. $\frac{R+r}{R}$ =	0,1597365
	0,1507885
nombre =	1,415105
Ce =	0,255684
$C\gamma = Z$ =	1,159421

§. 26. Ayant trouvé deux diſtances racourcies de la Comète à la terre, par exemple la premiere αA & la troiſieme γC, j'ai donné des regles pour en déduire les éléments de l'orbite §. 16. 17. Mais ſi l'on aimoit mieux n'employer que les rapports entre les trois diſtances, pour la méthode que j'ai propoſée dans le § 15. il faudroit déterminer log. α = log. $\frac{y}{x}$ = 0,1471845, & log. β = log. $\frac{y}{Z}$ = 0,2246449. Auſſi ferai-je l'application des rapports α, & β pour calculer les quantités U & I ſelon les formules du §. 15. Pour cet effet, il faudra connoître log. f = log. $\frac{a}{b}$ = 0,0008240 & log. b = log. $\frac{a}{c}$ = 0,0012280, & log αb = 0,1484125, & log. βf = 0,2251789, & log. bf = 0,0020520.

Calcul de la quantité *H*.

l. cos *T* = — 9,3306567
l. tang γ = 9,2304496

— l. cos *T* tang γ = 8,5611063
l cos. *q* = 8,8706315
l. tang. *G* = 8,7420435

— cos *q* tang *G* = 7,6126750
— cos *T* tang γ = — 0,036400
— cos *q* tang *G* = — 0,004099

0,040499
dont le log. = — 8,6074336
l. cos *m* = 9,9950174
log. *ab* = 0,1484125

— 8,7508635
dont le nombre = — 0,056346

l. cos *q* = 8,8706315
l. tang *g* = 9,0873823

7,9580138
— *l* cos *p* = + 8,6609079
l tang γ = 9,2304496

7,8913575
cos *q* tang *g* = 0,009079
cos *p* tang γ = 0,007787

+ 0,016866
dont le log. = 8,2270121
log. *bf* = 0,0020520

8,2290641
dont le nomb. = 0,016946
+ 0,038781

+ 0,055727
— 0,056346

H = — 0,000619

l tang *G* = 8,7420435
l cos *p* = — 8,6609422

— tang *G* cos *p* = 7,4029857
l tang *g* = 9,0873823
— *l* cos *T* = + 9,3306567

+ 8,4180390
— tang *G* cos *p* = + 0,002529
tang *g* cos *T* = + 0,026184

+ 0,023655
dont le log. = + 8,3739230
l. cos *b* = 9,9895339
log. β*f* = 0,2251689

+ 8,5886258
dont le nomb. = + 0,038781

Calcul de la quantité *L*.

l. tang *g* = 9,0873823
l. sin *T* = 9,9898090

l. tang *g* sin *T* = 9,0771913
— *l* tang *G* = — 8,7420435
l. sin *p* = 9,9995448

8,7415883
tang *g* sin *T* = + 0,119452
— tang *G* sin *p* = — 0,055154

+ 0,064298
dont le log. + 8,8081975
l. sin *n* = 9,3363041
l. β*f* = 0,2251689

+ 8,3696706
dont le nombre = 0,023424

l. tang *G* = 8,7420435
l. sin *q* = 9,9987998

l. tang *G* sin *q* = + 8,7408433
l. sin *T* = — 9,9898090
l. tang γ = 9,2304496

l. sin *T* tang γ = — 9,2202586
tang *G* sin *q* = + 0,055062
sin *T* tang γ = — 0,166057

— 0,110995
dont le log. = — 9,0452939
l. sin *m* = 9,1778648
log. α*b* = 0,1484125

— 8,3715712
dont le nombre = — 0,023517
+ 0,023424

L 0,000093

Calcul de la quantité M.

l. tang G	$= 8,7420435$
l. ſin $(p-n)$	$= 9,9934765$
	$8,7355200$
l. tang g	$= -9,0873823$
l. ſin $(T-n)$	$= 9,9999952$
	$-9,0873775$
tang G ſin $(p-n)$	$= +0,054390$
tang g ſin $(T-n)$	$= -0,122386$
	$-0,067896$
dont le log.	$= -8,8317994$
l. βf	$= 0,2251689$
	$-9,0569683$
dont le nomb.	$= -0,114012$
	$-0,048090$
	$-0,162102$
	$+0,163017$
M	$= +0,000915$

l. ſin q	$= 9,9987994$
l. tang g	$= 9,0873823$
	$+9,0861817$
l. ſin p	$= -9,9995448$
l tang γ	$= 9,2304496$
	$9,2299944$
ſin q tan g	$= +0,121950$
ſin p tang γ	$= -0,169822$
	$-0,047872$
dont le log.	$= -8,6800816$
log. bf	$= 0,0020520$
	$-8,6821336$
dont le nomb.	$= -0,048090$

l tang γ	$= 9,2304496$
l. ſin $(T-m)$	$= 9,9990931$
	$9,2295427$
l tang G	$= -8,7420435$
l ſin $(q-m)$	$= 9,9888635$
	$8,7309070$
tg. γ ſin $(T-m)$	$= +0,169645$
tg. G ſin $(q-m)$	$= -0,053815$
	$+0,115830$
dont le log.	$= +9,0638211$
log. αb	$= 0.1484125$
	$+9,2122336$
dont le nombre	$= 0,163017$

Pour calculer la formule.

$$\text{tang } U = -\frac{M}{2H} + \sqrt{\left\{\frac{M^2}{4H^2} - \frac{L}{H}\right\}}$$ j'employerai les logarithmes

$$+\log. M = + 6{,}9614210$$
$$-\log. 2H = - 7{,}0927206$$
$$\log. \frac{M}{2H} = - 9{,}8687004$$
$$\text{donc } \frac{M}{2H} + 0{,}739088$$

$$\log. \frac{M^2}{4H^2} = 9{,}7374008$$
$$\frac{M^2}{4H^2} = -0{,}546237$$
$$-\frac{L}{H} = -0{,}150242$$
$$\frac{M^2}{4H^2} - \frac{L}{H} = 0{,}395995$$

$$\log. L = - 5{,}9684829$$
$$\log. H = - 6{,}7916906$$
$$+ 9{,}1767923$$
$$-\frac{L}{H} = - 0{,}150242$$

donc $U = 53°50'$ ou $U = 6° 16'$,

$$\text{donc } \sqrt{\left\{\frac{M^2}{4H^2} - \frac{L}{H}\right\}} = \pm 0{,}629292$$
$$-\frac{M}{2H} = + 0{,}739088$$

donc tang $U = 1{,}368380$, ou $= 0{,}109796$

ſubſtituons $U =$ tang $53° 50'$ dans l'expreſſion de tang $I =$

$$\frac{\alpha \text{ ſin } U(-m) \text{ tang } G - f \text{ ſin } U \text{ tang } g}{\alpha \text{ ſin } (U - m) \text{ ſin } (T + U) - f \text{ ſin } U \text{ ſin } (U + p)}$$

$U = 53° 50'$	$U = 53° 50'$	$U = 53° 50'$
$m = 8° 39' 45''$	$T = 102° 21' 50''$	$p = 92° 37' 22''$
$U - m = 45° 10' 15''$	$U + T = 156° 11' 50''$	$U + p = 146° 27' 22''$

l. α = 0,1471845		l. α sin $(U-m)$ = 9,9979605	
l. sin $(U-m)$ = 9,8507760		l sin $(T+U)$ = 9,6059400	
l. α sin $(U-m)$ = 9,9979605			+ 9,6039005
l. tang G = 8,7420435		nombre =	+ 0,401698
	8,7400040		— 0,446096
nombre =	0,054955	denominat. =	— 0,044398
	— 0,098910		
numer =	— 0,043955		
— l. f = 0,0008240		— $l\ f$ sin U = 9,9070370	
l. sin U = 9,9070370		sin $(U+p)$ = 9,7423917	
— $l\ f$ sin U = 9,9078610			— 9,6494287
l tang g = 9,0873823		nombre =	— 0,446096
	— 8,9952433		
nombre =	— 0,098910		

log. numer = — 8,6430083
log. denom. = — 8,6473732

log tang. I = + 9,9956351 donc I = 44° 42′ 46″

L'on ne sauroit faire usage de la seconde racine de tang U, parcequ'il en résulteroient des distances négatives de la Comète à la terre, car il y auroit tang G > tang I sin $(U+T)$, & que la valeur de tang I deviendra negative. §. 18. Nro. 2.

§. 27. Le lieu de la terre étoit en 10^s 22° 20′ 37″, lors de la premiere observation, donc la longitude du noeud descendant est de 6^s 16° 10′ 37″, & l'inclinaison de l'orbite est de 44° 42′ 46″. M. *Euler* a déterminé par un calcul scrupuleux, la longitude du noeud en 11^s 25° 4′ 41″, & l'inclinaison de 40° 49′ 33″. Mais il ne faut pas être surpris de ce que les résultats de notre méthôde s'éloignent considérablement des vrais éléments de l'orbite, parceque nous avons supposé que le mouvement de la Comète est rectiligne & uniforme dans l'espace de 13 jours. On approchera d'avantage de la vérité, en partageant l'espace de 13 jours, p. e. depuis le 14 jusqu'au 20^{me}, & depuis le 20 jusqu'au 27^{me} d'Août, On calculera en conséquence les trois distances de la Comète à la terre pour les observations du 14, 16 & 20^{me} d'Août. Ayant trouvé les distances selon ce qui a été dit dans l'article 24 & 25, l'on continuera le calcul de la maniere qui suit.

Après avoir déterminé les lignes Ac, Aa &c. pour les obfervations du 20, 23 & 27me d'Août, on connoîtra les diftances du 23 & du 27, au moyen de la diftance du 20; foit celle de-ci $= D$, il y aura $D = \left((x + Ba) \frac{\text{fin}(s-u)}{\text{fin } s} - ac \right) \frac{R+r}{r}$ $- Ac$; (§. 23) d'où l'on déduira la feconde diftance, qui répond au 23me, favoir $x = \left\{ (D + Ac) \frac{r}{R+r} + ac - Ba \frac{\text{fin}(s-u)}{\text{fin } s} \right\} \frac{\text{fin } s}{\text{fin}(s-u)}$. donc l'on connoîtra la diftance qui appartient à la derniere obfervation favoir $Z = \frac{R+r}{R}$ $(x + Ba) \frac{\text{fin } u}{\text{fin } s} - Cc$, en y fubftituant la valeur de x, enforte qu'on connoîtra les diftances de la Comète à la terre, ou bien leurs rapports pour les 14, 23 & 27.

QUATRIEME ARTICLE,

Où l'on parle des méthôdes propres à corriger les éléments de l'orbite qu'on connoît à-peu-près par les méthôdes de l'article précédent.

§. 28. Je pourrois terminer ce mémoire, ayant propofé des méthôdes directes & approchées. *Mais comme il faudra* corriger les réfultats défectueux de ces méthôdes, peut-être verra-t-on avec plaifir, comment on pourra tirer parti de ces mêmes méthôdes pour faire un meilleur ufage de celles, dont les Aftronomes fe fervent d'ordinaire pour calculer les orbites des Comètes, dont les éléments font à peu près connus.

§. 29. La méthôde dont on fe fert communément, exige qu'on fuppofe pour deux diftances de la Comète au foleil, des quantités quelconques. Cette méthôde a été expliquée par M. *le Monnier* dans les inftitutions Aftronomiques *page* 349, &

par M. *de la Lande* dans les tables des planétes & des Cométes de *Halley*, *page* 78, & dans l'Aſtronomie §. 3071. Moyennant l'angle du ſoleil *CST* ou la diſtance *CS*, ſuppoſée, & moyennant la diſtance *ST* & l'angle à la terre *CTS*, on trouve la diſtance de la Comète à la terre, par conſéquent on calculera les éléments de l'orbite conformement aux régles expoſées dans le §. 16. Mais à cauſe des côtés donnés & l'angle non compris, la ſolution du triangle ſera douteuſe lorsque l'angle non compris *STC* eſt aigu, parceque l'angle *TSC* pourra être plus grand ou plus petit qu'un droit. Or ſi l'on ſuppoſe avec M. *le Monnier*, que deux angles au ſoleil ſont pris à volonté, on ne pourra pas toujours diſcerner, ſi l'angle au ſoleil pour la premiére obſervation doit être ſuppoſé plus grand ou plus petit que l'autre angle au ſoleil. Mais on reconnoîtra facilement, ſi la Comète s'approche ou s'éloigne du périhélie, pour prendre la ſeconde diſtance de la Comète au ſoleil plus grande ou plus petite que la précédente. Pour obvier à ces inconvénients, on n'aura qu'a ſuppoſer des quantités quelconques pour diſtances de la Comète à la terre, parceque la reſolution du triangle *CST* ne ſera plus douteuſe. Pour ne pas prendre au pur hazard deux quantités pour les deux diſtances de la Comète à la terre, on pourra déterminer leurs rapports ſelon §. 20, & ſuppoſer p. e. que la premiere diſtance eſt égale aux trois quarts de la diſtance du ſoleil à la terre, ou à la diſtance entiere; ſi le mouvement journalier de la Comète n'étoit pas plus grand que celui du ſoleil, alors on connoîtroit la ſeconde diſtance de la Comète à la terre au moyen du rapport dont nous venons de parler. Ou bien on pourroit faire uſage de notre ſeconde méthôde §. 21. pour déterminer à-peu-près les deux diſtances de la Comète à la terre. Enſuite on calculera les éléments de l'orbite ſelon les §. 16. & 17, & l'on comparera les temps calculés avec les temps obſervés, & on recommencera ce calcul jusqu'à ce qu'on ait reüſſi à concilier les calculs avec les obſervations conformément à la méthôde en queſtion.

§. 30. M. *Du Séjour* dans ſon eſſai ſur les Comètes *page* 230, propoſe une méthôde très exacte pour déterminer rigoureuſement les véritables éléments de l'orbite, ſi on les connoiſſoit à-peu-près. En différentiant les équations rigoureuſes, que l'Academicien a employées pour déterminer les éléments de l'orbite, on ſuppoſera toutes les quantités variables, excepté les temps & les diſtances du ſoleil à la terre. Enſuite il faudra éliminer les différentielles des huit inconnues §. 1. 2. 3. ſavoir dI, dU, de, db, dP, dN, dn, dv, en combinant les huit équations differentiel-

tielles. Car après avoir calculé avec les éléments ſuppoſés les longitudes & les latitudes géocentriques, on comparera les longitudes & les latitudes calculées avec les longitudes & les latitudes obſervées, & on employera la différence entre les longitudes & les latitudes calculées & obſervées, pour les différentielles des longitudes & des latitudes calculées, ſavoir pour dG, dg &c. Or les différentielles dI, dU &c. indiquent les corrections qu'il faudra appliquer aux éléments ſuppoſés. Mais M. *Du Séjour* étant parti de l'hypothêſe parabolique, il a du parvenir à une ſolution plus que déterminée de ce problême, comme il eſt arrivé. Mais en ſuivant la route que nous avons tenue dans les paragraphes cités, le problême ſera déterminé, parce qu'on aura huit équations différentielles, & huit inconnues, comme nous l'allons faire voir.

Quoique l'élimination des huit équations ſe puiſſe faire, & quoiqu'on veuille prendre la peine de calculer les expreſſions des différentielles malgré leur énorme complication, on ne déterminera pas rigoureuſement les corrections des éléments, ni par conſéquent les ~~véritables éléments de l'orbite~~, à moins que les éléments hypothétiques ne ſoient connus à très-peu-près. Si ces éléments s'écartent de pluſieurs degrés des véritables éléments de l'orbite, on ſera dans la néceſſité de reprendre, peut-être deux fois, le calcul, enſorte que la méthôde de M. *Du Séjour* ne peut pas être conſidérée comme rigoureuſe.

Pour déterminer donc les corrections applicables aux éléments qu'on connoit à-peu-près, je n'ai pas fait uſage du Paraboliſme, mais je me ſuis ſervi de la vraye hypothêſe elliptique. Voici la route que j'ai tenue.

Je différentie les huit équations expoſées dans les §§. 1 — 7, en poſant conſtantes, les longitudes & les latitudes géocentriques de la Comète, ou bien les quantités, T, t, θ, p, q & G, g, γ. Pour les autres quantités, elles ſont variables, enſorte que les différentielles des huit inconnues, dU, dI, dN, dn, dv, de, db, repréſentent les huit corrections; enfin les différentielles des temps écoulés entre les obſervations, ſavoir dR, dr, ſont connues, car elles marquent les erreurs des temps calculés. Je commencerai par différentier les équations *II*, *IV*, *VI*, en les réduiſant à cette forme p. e. la *II*de, $\sin I \sin T - \cos I \tang G \cos U = \frac{\tang G \sin U}{\tang N}$, donc en différentiant, on aura, $dI\,(\cos I \sin T + \sin I \tang G \cos U)$

$+ dU (\cos I \sin U \tan G - \frac{\tan G \cos U}{\tan N}) = - \frac{dN. \tan G \sin U}{\sin N^2}$

donc $dN = dU (\frac{\cot U}{\tan N} - \cos I) \sin N^2 - dI (\frac{\cot I \sin T}{\cos U \tan G} + 1) \sin N^2 \cot U \sin I$;

posant $(\frac{\cot U}{\tan N} - \cos I) \sin N^2 = B$ & $(\frac{\cot I \sin T}{\cos U \tan G} + 1) \sin N^2 \cot U \sin I$ $= C$, il y aura $dN = BdU - CdI$, qui est l'Equation I.

Différentiant de la même maniére l'équation IV, & posant $(\frac{\cot (U-p)}{\tan n} -$ $\cos I) \sin n^2 = B'$, & $(\frac{\cot I \sin t}{\cos (U-p) \tan g} + 1) \sin n^2 \cot (U-p) \sin I = C'$ on aura, $dn = B' dU - C' dI$, ou l'équation II.

Différentiant ainsi l'équation VI, & posant $(\frac{\cot (U-q)}{\tan v} - \cos I) \sin v^2 = B''$, & $(\frac{\cot I \sin \theta}{\cos (U-q) \tan \gamma} + 1) \sin v^2 \cos (U-q) \sin I = C''$, il y aura $dv = B'' dU$ $C'' dI$, qui sera l'équation III.

Je vais différentier les équations I, III, V, exposées dans les articles 1, 3, 4. Je substituerai les lettres S, s, σ aux distances de la Comète au soleil, marquées ci-devant par D, d, δ. & je donnerai la forme qui suit, aux équations mentionées, savoir, $\sin I \sin (U + T) - \tan G \cos I = A \tan G. \frac{\sin U}{S \sin N}$

Or, $d. \frac{1}{S} = d. \frac{1 + e \cos (p - N)}{b} = - \frac{db}{Sb} + \frac{de \cos (P - N)}{b} - \frac{(dP - dN)}{b}$ $e \sin (P - N)$. donc en différentiant, on aura

$dI (\cos I \sin (U + T) + \tan G \sin I) + dU (\sin I \cos (U + T)$ $- \frac{A \tan G \cos U}{S \sin N}) + \frac{A \tan G \sin U}{\sin N} (- \frac{db}{Sb} + \frac{de \cos (P - N)}{b} -$

$\frac{edP}{b}\operatorname{fin}(P-N)+dN\left(\frac{e\operatorname{fin}(P-N)}{b}+\frac{\cot N}{S}\right)=0$ Multipliant par $\frac{Sb\operatorname{fin}N}{A\operatorname{tang}G\operatorname{fin}U}$
& pofant $BdU - CdI$ pour dN, par l'équation I, il fera

$$dI\left\{(\cos I\operatorname{fin}(U+T)+\operatorname{tang}G\operatorname{fin}I)\frac{Sb\operatorname{fin}N}{A\operatorname{tang}G\operatorname{fin}U}-(eS\operatorname{fin}(P-N)+b\cot N)C\right\}$$

$$+dU\left\{\frac{\operatorname{fin}I\cos(U+T).\,Sb\operatorname{fin}N}{A\operatorname{tang}G\operatorname{fin}U}-b\cot U+B\,(eS\operatorname{fin}(P-N)+b\cot N)\right\}$$

$$-db+Sde\cos(P-N)-SdP\operatorname{fin}(P-N)=0$$

Nommant pour abréger, $(\cos I\operatorname{fin}(U+T)+\operatorname{tang}G\operatorname{fin}I)\frac{Sb\operatorname{fin}N}{A\operatorname{tang}G\operatorname{fin}U}$
$-(eS\operatorname{fin}(P-N+b\cot N)\,C=D$, & $\frac{\operatorname{fin}I\cos(U+T).\;Sb\operatorname{fin}N}{A\operatorname{tang}G\operatorname{fin}U}$
$-b\cot U+B\,(eS\operatorname{fin}(P-N)+b\cot N)=E$
On aura l'équation. IV.

$$DdI+EdU-db+Sde\cos(P-N)-SdP\operatorname{fin}(P-N)=0$$

Traitant l'équation III du §. 3. de la même maniere, & mettant $(\cos I\operatorname{fin}(U-p+t)$
$+\operatorname{tang}g\operatorname{fin}I)\frac{fb\operatorname{fin}n}{a\operatorname{tang}g.\operatorname{fin}(U-p)}-(ef.\operatorname{fin}(P-n)+b\cot n)\,C'=D'$
& $\frac{\operatorname{fin}I\cos(U-p+t).\,fb.\operatorname{fin}n}{a\operatorname{tang}G\operatorname{fin}(U-p)}-b\cot(U-p)+B'\,(ef.\operatorname{fin}(P-n)$
$+b\cot n)=E'$,
on aura l'équation V. $D'dI+E'dU-db+f.de\cos(P-n)$
$-f.dP\operatorname{fin}(P-n)=0$
Traitant enfin l'équation V. du §. 5, auffi de la même maniere, & mettant
$(\cos I\operatorname{fin}(U-q+\theta)+\operatorname{tang}\gamma\operatorname{fin}I)\frac{\sigma b\operatorname{fin}v}{\alpha\operatorname{tang}\gamma\operatorname{fin}(U-q)}-(e\sigma\operatorname{fin}(P-v)+b\cot v)\,C''$
$=D''$ & $\frac{\operatorname{fin}I\cos(U-q+\theta)\;\sigma b\operatorname{fin}v}{\alpha\operatorname{tang}\gamma\operatorname{fin}(U-q)}-b\cot(U-q)+B''\,(e\sigma\operatorname{fin}(P-v)$
$+b\cot v)=E''$,

on formera l'équation VI. $D''dI + E''dU - db + \sigma de \cos (P - v) - \sigma dP \sin (P - v) = o$

Multipliant l'équation IV. par $\int \cos (P - n)$ & l'équation V par $S \cos (P - N)$ & retranchant l'une de l'autre, on aura l'équation VII. $(SD' \cos ((P - N) - \int D \cos (P - n)) dI + (SE' \cos (P - N) - \int E \cos (P - n)) dU + (\int \sin (P - n) - S \sin (P - N)) db + S\int dP \sin (n - N) = o$

Multipliant ensuite l'équation IV. par $\sigma \cos (P - v)$ & l'équation VI. par $S \cos (P - N)$, & retranchant l'une de l'autre, on aura l'équation VIII.... $(SD'' \cos (P - N) - \sigma D \cos (P - v)) dI + (SE' \cos (P - N) - \sigma E \cos (P - v)) dU + (\sigma \sin (P - v) - S \sin (P - N)) db + S\sigma dP \sin (U - N) = o$

ou bien posant $SD' \cos (P - N) - \int D (P - n) = F$, & $SD'' \cos (P - N) - \sigma D \cos (P - v) = F'$, & $SE' \cos (P - N) - \int E \cos (P - n) = H$, & $SE'' \cos (P - N) - \sigma E \cos (P - v) = H'$, & $\int . \sin (P - n) - S \sin (P - N) = K$, & $\sigma \sin (P - v) - S \sin (P - N) = K'$,

l'équation VII, deviendra, $FdI + HdU + Kdb + S\int dP \sin (n - N) = o$, & l'quation VIII, se changera en, $F'dI + H'dU + K'db + S\int P \sin (v - N) = o$.

Multipliant l'équation VII par $\sin (v - N)$ & l'équation VIII par $\sin (n - N)$, & retranchant l'une de l'autre, on trouvera, $(F \sin (v - N) - F' \sin (n - N)) dI + (H \sin (v - N) - H' \sin (n - N)) dU + (K \sin (v - N) - K' \sin (n - N)) db = o$

d'où l'on déduit $db = \frac{(F \sin (v - N) - F' \sin (n - N)) dI + (H \sin (v - N) - H' \sin (n - N)) dU}{K' \sin (n - N) - K \sin (v - N)}$

$$= \frac{(F\delta - F') dI + (H\delta - H') dU}{K' - K\delta}$$

nommant $\sin (v - N) : \sin (n - N) = \delta$,

& substituant cette valeur de db dans l'équation VII, *on en déduira*

$$dP = - \frac{FdI + HdU}{S\int \sin (n - N)} - \frac{K}{S\int \sin (n - N)} \times \frac{(F\delta - F') dI + (H\delta - H') dU.}{K' - K\delta}$$

J'ai trouvé une voye asſès expéditive *pour déterminer les deux inconnues* dI & dU

On ſait que l'aire d'un ſecteur ASC = l'intégrale de $\frac{SC^2}{2} d. ASC$ ou = intégrale de $\frac{S^2}{2} (dP - dN)$. donc l'aire du ſecteur ASD = intégrale de

$\frac{s^2}{2}(dP - dn)$. Mais nommant R, le temps dans lequel le ſecteur DSC compris entre les rayons vecteurs S & s, eſt parcouru, ce ſecteur s'exprimera auſſi ſelon §. 8. par $\frac{\pi R \sqrt{b}}{\varrho}$ = l'intégrale de $\frac{S^2}{2}(dP - dN)$ — l'intégrale de $\frac{s^2}{2}(dP - dn)$, donc en différentiant, on aura $\frac{2\pi dR\sqrt{b}}{\varrho} + \frac{\pi R db}{\varrho\sqrt{b}} = (S^2 - s^2)dP + S^2 dn - s^2 dN$. la différentielle dR dénote la différence entre le temps obſervé & calculé, ou l'erreur du temps, qui eſt donc une quantité donnée. D'ailleurs il faut ſe rappeller que la quantité ϱ déſigne le temps périodique du ſoleil exprimé en jours. Or les différentielles, dG, dP, dN, dn, ont été exprimées par dI & dU, donc en ſubſtituant ces expresſions au lieu des ces différentieles, on aura $\frac{2\pi dR\sqrt{b}}{\varrho} +$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi R}{\varrho\sqrt{b}} \times \frac{F\delta - F'}{K' - K\delta} \\ + \frac{(S^2 - s^2)F}{Ss.\sin(n-N)} + \frac{K(F\delta - F')(S^2 - s^2)}{Ss.\sin(n-N)(K' - K\delta)} \\ + s^2 C' - C S^2 \end{array}\right\} dI \left.\begin{array}{l} + \frac{\pi R}{\varrho\sqrt{b}} \times \frac{H\delta - H'}{K' - K\delta} \\ \frac{(S^2 - s^2)H}{Ss.\sin(n-N)} + \frac{K(S^2 - s^2)}{Ss.\sin(n-N)} \times \frac{H\delta - H'}{K' - K\delta} \\ - s^2 B' + S^2 B \end{array}\right\} dU = 0$$

Ou bien nommant L, le coefficient de dI &, nommant M, le coefficient de dU, on formera l'équation IX, $\frac{2\pi dR\sqrt{b}}{\varrho} + LdI + MdU = 0$

Exprimant par r, le temps écoulé entre la 1[re] & la 3[me] obſervation, on formera, comme auparavant, l'équation ſuivante,

$\frac{2\pi dr\sqrt{b}}{\varrho} + \frac{\pi r db}{\varrho\sqrt{b}} = (S^2 - \sigma^2)dP + \sigma^2 dv - S^2 dN$, & ſubſtituant pour db, dP &c. les valeurs réquiſes, on trouvera $\frac{2\pi dr\sqrt{b}}{\varrho} +$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\pi r}{\varrho\sqrt{b}}\times\dfrac{F\delta-F'}{K'-K\delta} \\ +\dfrac{(S^2-\sigma^2)F}{Sf.\sin(n-N)}+\dfrac{K(F\delta-F')(S^2-\sigma^2)}{Sf.\sin\overline{n-N}(K'-K\delta)} \\ +\sigma^2C''-S^2C \end{array}\right\} dI \quad \left.\begin{array}{l} +\dfrac{\pi r}{\varrho\sqrt{b}}\times\dfrac{H\delta-H'}{K'-K\delta} \\ \dfrac{(S^2-\sigma^2)H}{Sf.\sin(n-N)}+\dfrac{K(S^2-\sigma^2)}{Sf.\sin(n-N)}\times\dfrac{H\delta-H'}{K'-K\delta} \\ -\sigma^2B''+S^2B \end{array}\right\} dU=0$$

Appellant L', M', les coefficiens de dI & dU, on aura enfin l'équation X $\dfrac{2\pi dr\sqrt{b}}{\Phi}+L'dI+M'dU=0$. Donc en combinant les équations IX & X., on parviendra à dégager les inconnues dI & dU, qui font les corrections qu'il faut appliquer à l'inclinaifon de l'orbite & à la fituation du noeud, par conféquent, on aura $dI=\dfrac{(M'dR-Mdr)2\pi\sqrt{b}}{(L'M-M'L)\varrho}$ &, $dU=\dfrac{(L'dR-Ldr)2\pi\sqrt{b}}{(M'L-ML')\varrho}$

Je ne m'arrêterai pas à réduire les coefficiens M, L &c. dans leurs éléments, parceque les expresfions, qui en réfultent, font fi compliquées, que les aftronomes qui en voudroient faire ufage, aimeroient mieux calculer un coefficient après l'autre, de la maniere que je le ferai voir. Il faut commencer par calculer les coefficiens, B, B', B'' & C, C', C''; qui ne font pas difficiles à déterminer. Enfuite il s'agit de déterminer les coefficiens D, D' & E, E', & puis les coefficiens F, F' & K, K' & H, H'. Enfin il faudra calculer les coefficiens M, M' & L, L', en faifant attention aux quantités que ces coefficiens ont de commun, par-là le calcul de ces coefficiens fera moins pénible.

Après avoir trouvé les corrections dI & dU, qu'il faudra appliquer à l'inclinaifon de l'orbite & à l'angle U, il faudra *chercher les corrections des diftances* de la Comète au noeud, favoir les quantités dN, dn, dv moyennant les équations I, II, III. Puis on calculera très facillement la correction du demiparametre ou db, & enfuite dP; l'expresfion de dP fe peut réduire à celle-ci $-\dfrac{FdI+HdU-Kdb}{Sf\sin(n-N)}$. L'on déterminera enfin l'excentricité, ou la correction de, par l'équation VI, qui fournit $de=(db+\sigma f dP\sin(P-v)-D''dI-E''dU:\sigma\cos(P-v)$ Mais après tout, je

doute fort, qu'aucun aſtronome veuille faire uſage de ces formules, vu leur grande complication. Il m'auroit été facile de propoſer pluſieurs méthôdes pour réſoudre le probléme en queſtion, ſi je n'avois pas voulu me tenir exactement au programme de l'*Académie Royale*, qui exige des méthôdes analytiques, *praticables* pour les Aſtronomes.

§. 31. *Newton* dans la 42^{me} poſition du troiſieme livre des Principes a ébauché une méthôde pour corriger l'orbite parabolique; & cette méthôde a été perfectionnée par M. *Euler;* ce grand homme en à fait uſage pour corriger l'orbite parabolique dans la *Theoria Planetarum & Cometarum*, & pour corriger l'orbite Elliptique dans *ſes reherches ſur la Comète de* 1769. L'eſprit de cette méthôde, revient à ceci. On prendra trois obſervations différentes de celles, ſur lesquelles la théorie de la Comète, approchée, a été établie. L'on fera donc trois hypothêſes. La premiere eſt la même qu'on vient d'établir, moyennant cette hypothêſe, & ſur-tout par le ſecours de la longitude du noeud & de l'inclinaiſon de l'orbite, on determinera les diſtances de la Comète au ſoleil, les anomalies vrayes, les aires des ſecteurs rélativement aux trois obſervations, pour en déduire les temps dans lesquels ces aires ſont décrites. Si ces temps ne différoient pas des temps obſervés, l'orbite ſeroit exacte; mais comme celà ne pourra gueres arriver, il faudra former deux autres hypothêſes & en déduire de la même maniere, que dans la premiere hypothêſe, les temps des ſecteurs. Pour cet effet, l'on employera dans la ſeconde ſuppoſition, l'inclinaiſon de la premiere hypothêſe, mais l'on augmentera ou diminuera la longitude du noeud. De même l'on conſervera dans la troiſieme hypothêſe la longitude du noeud de la premiere hypothêſe, augmentant ou diminuant l'inclinaiſon de l'orbite. Par le ſecours de l'inclinaiſon & de la longitude du noeud, & avec trois lieux géocentriques de la Comète, on calculera les temps dans les quels les ſecteurs ſont décrits. Les différences entre les deux intervalles des temps calculés & obſervés, fourniront deux équations propres à déterminer les deux inconnues, ou les corrections du noeud & de l'inclinaiſon ſuppoſées dans la premiere hypothêſe. Ces deux corrections s'appliqueront aux autres éléments de l'orbite pour en déduire les véritables. Mais les corrections qu'on trouve par cette voye ne ſont pas exactes, il vaudra mieux déduire directement des deux éléments corrigés, les trois ou quatre autres éléments ſelon la méthôde même ſur laquelle toute cette recherche eſt fondée. S'il s'agiſſoit d'établir l'orbite elliptique, on pourra employer plus aiſément nos formules pour déterminer les temps proportionels aux ſecteurs §. 6. que les ſéries.

§. 32. Je propoſerai à mon tour une méthôde pour corriger les éléments de l'orbite, qui ne ſera certainement pas plus longue que la précédente, elle abrége conſidérablement le calcul des anomalies vrayes, qui eſt très long, ſurtout quand on fait uſage de l'hypothêſe elliptique. Je ſuppoſe qu'on connoiſſe à-peu-prés le *lieu du noeud*, celui *du périhélie* & *l'inclinaiſon* de l'orbite, qu'on aura déduits d'une des deux méthôdes, que nous avons données dans l'article precédent §. 26. J'établis quatre hypothêſes. La premiere hypothêſe renferme les trois éléments, tels qu'on a coutume de les déduire du paraboliſme §. 16, ou de l'hypothêſe elliptique. Je ſuppoſe que dans la ſeconde hypothêſe la longitude du noeud varie ſeule, dans la troiſieme, l'inclinaiſon de l'orbite, & dans la quatrieme, le lieu du périhélie. Pour chacune des trois obſervations données, & pour les trois premieres hypothêſes, je calcule les diſtances de la Comète au noeud, moyennant la formule $\text{tang}\, N = \frac{\text{tang}\, G \text{ ſin}\, U}{\text{ſin}\, I \text{ ſin}\, T - \cos I \text{ tang}\, G \cos U}$. §. 2, il faut remarquer qu'on aura $\text{tang}\, N = \frac{\text{tang}\, G \text{ ſin}\, U}{\text{ſin}\, I \text{ ſin}\, T + \cos I \text{ tang}\, G \cos U}$, ſi la ligne du noeud ne ſe trouve pas entre la terre & la Comète. 2) Par conſéquent on connoîtra les anomalies vrayes $= P - N$, pour les quatre hypothêſes. 3) On cherchera pour les quatre hypothêſes, les rayons vecteurs de la Comète, par les formules,

$$D = \frac{A \text{ ſin}\, U}{\cos I \text{ ſin}\, N \left\{ \frac{\text{tang}\, I \text{ ſin}\, (U+T)}{\text{tang}\, G} - 1 \right\}} \quad §.1,$$

mais ſi la terre ſe trouvoit entre la Comète & la ligne du noeud, il y auroit $D = \frac{A \text{ ſin}\, v}{\cos I \text{ ſin}\, N \left\{ \frac{\text{tang}\, I \text{ ſin}(U+T)}{\text{tang}\, G} + 1 \right\}}$. Parceque le lieu du périhélie n'entre pas dans l'expreſſion du rayon vecteur, il s'enſuit, que le même rayon vecteur aura lieu dans la premiere & la quatrieme hypotêſe. 4) On cherchera la diſtance périhélie $p = D \cos \overline{\frac{P-N}{2}}$ pour les 4 hypothêſes. 5) Enfin le paſſage de la Co-

mète

mète au périhélie se détermine par la formule, $\frac{\bar{e} p \sqrt{p}}{2\pi}$ (tang $\frac{(P-N)}{2}$ $+\frac{1}{3}$ tang $\frac{(P-N)^3}{2}$.) §. 10; ou on le trouvera moyennant les tables des mouvemens des Comètes.

Avant de démontrer comment on déduit de cette méthôde les corrections des élément, je détaillerai le calcul des formules exposées rélativement aux quatre hypothêses.

§. 33. Pour établir la quatrieme hypothêse il faut que je cherche le lieu du périhélie, par le moyen de la longitude du noeud que j'ai trouvée de 0ˢ 16° 10′ 37″, & de l'inclinaison qui étoit de 44° 42′ 46″. § 27.

Je commencerai donc par déterminer les deux distances racourcies de la terre à la Comète au temps des observations du 14 & du 27 d'Août. voyez §§. 15 & 16, 18.

$U =$ 53° 50′	$U =$ 53° 50′	$U =$ 53° 50′
$T =$ 102° 21′ 50″	$n =$ 12° 31′ 42″	$q =$ 85° 31′ 42″
$U + T =$ 156° 11′ 50″	$U - n =$ 41° 18′ 18″	$U + q =$ 139° 21′ 42″

Calcul de l'observation du 14. Août.

l a	= 0,0052180	*l* tang *I*	= 9,9956351
l sin *U*	= 9,9070370	*l* sin (*U+T*)	= 9,6059400
l tang *I*	= 9,9956351		9,6015751
log. num.	= 9,9078901	nombre	= 0,399553
log. dénom.	= 9,5369875	tang *G*	= 0,055213
C T	= 0,3709026	dénom.	= 0,344340
l a	= 0,0052180		
l. tang *E*	= 0,3656846	$90° - \frac{T}{2}$	= 38° 49′ 9″
		E — 45°	= 21° 41′ 30″

log. (*E* — 45°)	= 9,5996428	dont l'angle	= 17° 44′ 46″
log. $(90° - \frac{T}{2})$	= 9,9055474	$90° - \frac{T}{2}$	= 38° 49′ 5″
	9,5051902	*C S T*	= 56° 33′ 51″

Calcul de l'obſervation du 27 d'Août.

l. c	= 0,0039900	l. tang I	= 9,9956351
l ſin$(U-n)$	= 9,8195882	l. ſin $(u+q)$	= 9,8137692
l. tang I	= 9,9956351		0,8094043
log. num.	= 9,8192133	nombre	= 0,644769
log dénom.	= 9,6764706	tang γ	= 0,170013
$C''\,\theta$	= 0,1427427	dénom.	= 0,474756
$l\,c$	= 0,0039900	$90^\circ - \frac{\theta}{2}$	= 40° 51′ 33″
l. tang E	= 0,1387527	$E - 45^\circ$	= 9° 0′ 3″

l. tang $(E - 45^\circ)$	= 9,1997533	donne l'angle	= 7° 48′ 6″
l. tang$(90^\circ - \frac{\theta}{2})$	= 9,9370062	$90^\circ - \frac{\theta}{2}$	= 40° 51″ 33″
	9,1367595	$C''S\theta$	= 48° 39′ 39″

l. $c\,T$	= 0,3709026	l. $c''\,\theta$	= 0,1427427
l. ſin T	= 9,9898090	l. ſin θ	= 9,9954470
	9,3607116		0,1381897
l. ſin $c\,S\,T$	= 9,9215115	l. ſin $c''\,S\,\theta$	= 9,8755318
l. $c\,S$	= 0,4392001	l. $c''\,S$	= 0,2626579

log. $c\,T$	= 0,3709026	l. $c''\,\theta$	= 0,1427427	log. δ	= 0,2662530
l. tang G	= 8,7420431	l. tang γ	= 9,2304496	log. D	= 0,4326930
	9,1129457		9,3732923	log. $\frac{\delta}{D}$	= 9,8335600
l. $c\,S$	= 0,4322001	l. $c''\,S$	= 0,2626579	log. $\sqrt{\frac{\delta}{D}}$	= 9,9167800
l. tang LA	= 8,6807456	l. tang la	= 9,1105354	l. ſin $\frac{\pi}{2}$	= 8,7583581
l. ſin LA	= 8,6802527	l. ſin la	= 9,1069403		
l. ſin I	= 9,8472971	l. ſin I	= 9,8472971		

$l.\ \sin LN = 8{,}8329556$	$\sin LN = 9{,}2596432$	$L\sqrt{\frac{\delta}{D}} : \sin\frac{\pi}{2} = 1{,}1584219$
$LN = 3^\circ 54' 11''$	$lN = 10^\circ 28' 33''$	$\sqrt{\frac{\delta}{D}} : \sin\frac{\pi}{2} = 14{,}401976$
$l.\ c\,S = 0{,}4322001$	$lc''\,S = 0{,}2626579$	$\cot\frac{\pi}{2} = 17{,}415148$
$l.\ \cos LA = 9{,}9995071$	$\cos la = 0{,}9964049$	
$\log.\ D = 0{,}4326930$	$\log.\ \delta = 0{,}2662530$	$\tan \phi = 3{,}013172$
$lN = 10^\circ 28' 33''$	donc $\frac{\pi}{2} = 3^\circ 17' 11''$	$\phi = 143^\circ 16' 50''$
$lN = 3^\circ 54' 11''$		$LN = 10^\circ 28' 33''$
$\pi = 6^\circ 34' 22''$		$PSN = 153^\circ 45' 23''$

Or longit. du noeud $= 0^s\ 16^\circ\ 10'\ 38''$
$P\ S\ N = 5^s\ 3^\circ 45' 23''$

Lieu du périhélie $= 5^s\ 19^\circ\ 56'\ 1''$
qui selon du M. *Euler* est dans $4^s\ 24^\circ\ 15'\ 32''$.

§. 34. J'établirai donc quatre hypothêses, dont la premiere suppose les trois éléments tels que je viens de les déduire du cacul.

Dans la seconde, la longitude du noeud sera $= 0^s\ 16^\circ\ 10'\ 37'' - 6^\circ = 0^s\ 10^\circ\ 16'\ 57''$.

Dans la troisieme, l'inclinaison de l'orbite sera $= 44^\circ\ 42'\ 46'' - 3^\circ = 41^\circ\ 42'\ 46''$.

Et dans la quatrieme hypothêse le lieu du périhélie $= 5^s\ 19^\circ\ 56'\ 1'' - 6^\circ = 5^s\ 13^\circ\ 56'\ 1''$.

Conformément à ces quatre hypothêses, je calculerai la distance périhélie & le passage par le périhélie, pour les trois observations du 14, 23, 27 d'Août, selon §. 32.

Ayant trouvé par le calcul précédent les distances au noeud, N & v & les distances D & δ pour le 14*me* & 27*me* d'Août, je me passerai de les déterminer par la premiere hypothêse.

Calcul pour l'obſervâtion du 14*me* d'Août.

Premiere hypothêſe	Seconde hypothêſe	Troiſ. hypothêſe	Quatr. hypothêſe
	Longit. du noeud $= 0^s\, 10^\circ\, 10'\, 37''$	$0^s\, 16^\circ\, 10'\, 37''$	
	longit. de la terre $= 10^s\, 22^\circ\, 20'\, 37''$	$10^s\, 22^\circ\, 20'\, 37$	
	$U = 47^\circ\, 50'$	$U = 53^\circ\, 50'$	$U = 53^\circ\, 50'$
	$I = 44^\circ\, 42'\, 46''$	$I = 41^\circ\, 42'\, 46''$	$I = 44^\circ\, 42'\, 46''$
	$T + U = 150^\circ\, 11'\, 50''$	$T + U = 156^\circ\, 11'\, 50''$	
	$P = 159^\circ\, 45'\, 24'$	$P = 153^\circ\, 45'\, 24''$	$P = 147^\circ\, 45'\, 24''$
	l. tang $G = 8,7420435$	8,7420435	
	l. ſin $U = 9,8699326$	9,9070370	
	l. tang G ſin $U = 8,6119761$	8,6490805	
	l. ſin $I = 9,8472971$	9,8230810	
	l. ſin $T = 9,9898090$	9,9898090	
	l. ſin I ſin $T = 9,8371061$	9,8128900	
	l. tang $G = 8,7420435$	8,7420435	
	l. cos $I = 9,8516512$	9,8730238	
	l. cos $U = 9,8269098$	9,7709522	
	l. t. G.c.I.c.$U = 8,4206045$	8,3860195	
	t. G c. I c. $U = -0,026339$	$-$ 0,024323	
	ſin I ſin $T = +$ 0,687236	$+$ 0,649965	
	$+$ 0,660897	$+$ 0,625642	
	dont le log. $= 9,8201338$	9,7963259	
	l. tang G ſin $U = 8,6119761$	8,6490805	
	tang $N = 8,7918423$	8,8527546	
	$N = 3^\circ\, 32'\, 37''$	$N = 4^\circ\, 4'\, 30''$	
	$l\, A = 0,0052180$	0,0052180	
	l. ſin $U = 9,8699326$	9,9070370	
	$l\, A$ ſin $U = 9,8751506$	9,9122550	
	l ſin $I = 9,8472971$	9,8230810	
	l ſin $(U+T) = 9,6963704$	9,6059400	
	9,5436675	9,4290210	
	l tang $G = 8,7420435$	8,7420435	
	0,8016240	0,6869775	

	nombre = 6,333271	4,863820	
	— 1	— 1,	
	5,333271	3,863820	
	dont le log. = 0,7269937	0,5870169	
	l. sin N = 8,7910465	8,8516388	
	l. cos I = 9,8516512	9,8730238	
	9,3696914	9,3116795	
	l. A sin U = 9,8751506	9,9122550	
	log. D = 0,5054592	0,6005755	
	P = 159°45′24″	P = 153°45′23″	P = 147°45′24″
N = 3°54′11″	N = 3°32′37″	N = 4° 4′30″	N = 3°54′11″
ϕ = 143°16′50″	$P-N$ = 156°12′47″	$P-N$ = 149°40′53″	$P-N$ = 143°51′13″
$\frac{\phi}{2}$ = 71°38′25″	$\frac{P-N}{2}$ = 78° 6′25″	$\frac{P-N}{2}$ = 74°50′26″	$\frac{P-N}{2}$ = 71°55′36″
log. D = 0,4326930	0,5054592	0,6005755	0,4326930
l. cos $\left\{\frac{P-N}{2}\right\}^2$ = 8,9965700	8,6281352	8,8349632	8,9833788
l. p = 9,4292630	9,1335944	9,4355387	9,4160718
p = 0,268697	0,136017 = p'	0,272608 = p''	0,260658 = p'''
	0,268697 = p	0,268697 = p	0,268697 = p
	—0,132680 = $p'-p$	—0,003911 = $p''-p$	—0,008039 = $p'''-p$

Je dénoterai par x, y, z les corrections du noeud, de l'inclinaison & du périhélie. Or supposant qu'on partage également l'erreur du parametre entre les erreurs ou corrections du noeud, de l'inclinaison, & du périhélie; ces erreurs seront proportionelles aux variations supposées aux trois éléments de l'orbite, d'où résultera l'équation suivante, $0,268697 - \frac{0,132680\,x}{6} + \frac{0,003911\,y}{3} - \frac{0,008039\,z}{6} =$ ou bien on aura l'équation I*re*, $0,26897 - 0,022113\,x + 0,001304\,y + 0,001340\,z$, exprimant les corrections x, y, z en degrés.

Pour trouver le temps du passage par le périhélie, je me servirai des tables des mouvements des Comètes, qui sont calculées exactement dans l'Astronomie de M. de *La Lande*. Je chercherai donc les temps des tables qui correspondent aux anomalies trouvées. Multipliant ces temps par $\sqrt{p^3}$, je connoîtrai les temps dans

les quels font décrites les aires des fecteurs, donc auffi le temps du paffage au périhélie,

temps des tables, 992,5 j.	2643,7	1681,3	1040,7
dont le log. = 2,9967305	3,4222122	3,2256452	3,0173256
$l \sqrt{p^3}$ = 9,1438945	8,7003916	9,1533080	9,1241077
2,1406250	2,1226038	2,3789532	2,1414333
nombre = 138,237 jours	132,618	239,306	138,495
226,523 jours	226,523	226,523	226,523
t. du paffage 364,760 = R	359,141 = R'	465,829 = R''	365,018 = R'''
	364,760 = R	364,760	364,760
	$R'-R = -5,619$	+ 101,061 = $R''-R$	+ 0,248 = $R'''-R$,

d'où réfulte II.) $364,760 - 0,93650\,x + 33,68666\,y + 0,04133\,z.$

35. Le calcul de l'obfervation du 13 d'Aout, fe fera felon les formules,

$$\tang n = \frac{\tang g \sin(U-m)}{\sin I \sin t - \tang g \cos I \cos(U-m)} \ \& \ d = \frac{a \sin(U-m)}{\cos I \sin n \left\{ \frac{\sin I \sin(U+p)}{\tang g} - 1 \right\}}$$

Premiere hypothêfe	Seconde hypothêfe	Troifieme hypoth.	Quatrieme hypoth.
$U = 53° 50'$	$U = 47° 50'$	comme dans la premiere	comme dans la premiere.
$m = 8° 39' 45''$	$m = 8° 39' 45''$		
$p = 92° 37' 22''$	$p = 92° 37' 22''$		
$U-m = 45° 10' 15''$	$U-m = 39° 10' 15''$		
$U+p = 146° 27' 22''$	$U+p = 140° 27' 22''$		
l. tang g = 9,0873823	9,0873823	9,0873823	
l. fin (U−m) = 9,8507760	9,8004691	9,8507760	
l.t.g fin(U−m) = 8,9381583	8,8878514	8,9381583	
l. fin I = 9,8472971	. . . . . .	9,8230870	
l. fin t = 9,9915206	. . . . . .	9,9915206	
l. fin I fin t = 9,8388177	9,8388177	9,8146076	
l. tang g = 9,0873823	9,0873823	9,0873823	
l. cos I = 9,8516512	9,8516512	9,8730238	
l. cos (U−m) = 9,8482074	9,8894513	9,8482074	
8,7872409	8,8284848	8,8086135	
nombre = −0,061267	−0,067372	−0,064359	
fin I fin t = +0,689952	+0,689952	+0,652532	
+0,628685	+0,622580	+0,588173	

dont le log. = 9,7984331	9,7941952	9,7695051	
l. t.g sin$(U\text{-}m)$ = 8,9381583	8,8878514	8,9381583	
tang n = 9,1397252	9,0936562	9,7686532	
n = 7°51′16″	n = 7°4′20″	n = 8°23′17″	n = 7°51′6″
P = 153°45′23″	P = 159°45′24″	P = 153°45′24″	P = 147°45′24″
$P-n$ = 145°54′7″	$P-n$ = 152°41′4″	$P-n$ = 145°22′7″	$P-n$ = 139°54′18″
l a = 0,0043940	0,0043940	0,0043940	
l. sin$(U\text{-}m)$ = 9,8482074	9,8004691	9,8482074	
l. a sin$(U\text{-}m)$ = 9,8526014	9,8048631	9,8526014	
sin I = 9,8472971	9,8472971	9,8230810	
sin$(U+p)$ = 9,7423948	9,8039139	9,7423948	
9,5896919	9,6512110	9,5654758	
l. tang g = 9,0873823	9,0873823	9,0873823	
0,5023096	0,5638287	0,4780935	
nombre = 3,179140	3,662932	3,006724	
−1	1	1	
2,179140	2,662932	2,006724	
dont le log. = 0,3382851	0,4253592	0,3024878	
l. cos I = 9,8516512	9,8516512	9,8730238	
l. sin n = 9,1354802	9,0899903	9,1639864	
9,3254165	9,3670007	9,3394980	
l. a sin$(U\text{-}m)$ = 9,8326014	9,8048631	9,8551700	
l. d = 0,5071849	0,5621376	0,5156720	0,5071849
l. c. $\left\{\frac{P-n}{2}\right\}^2$ = 8,9343050	8,7463420	8,9475610	9,0700792
l. p = 9,4414899	l. p' = 9,3084796	l. p'' = 9,4632330	9,5772641 = l. p'''
p = 0,276369	p' = 0,203469	p'' = 0,292636	0,377802 = p'''
	p = 0,276369	p = 0,276369	0,276369 = p
	$p'-p$ = −0,072909	$p''-p$ = + 0,01627	0,101433 = $p'''-p$

D'où résulte l'équation III.) 0,276369 − 0,012151 x + 0,005423 y + 0,016905 z.

Les tables des Comètes fournissent les temps, qui correspondent aux anomalies trouvées.

Temps des tables 1218,2	2245,7	1168,2	789,3
dont le log. = 3,0857186	3,3513517	3,0675172	2,8972421
l. $\sqrt{p^3}$ = 9,1622348	8,7552344	9,1948495	9,3658961
2,2479534	2,1065861	2,2623667	2,2631382
nombre = 176,991998	133,833300	182,964470	183,289976
23 Août 12h 17′ 1′ = 235,511801	235,511801	235,511801	235,511801
R = 412,503799	369,345101 = R'	418,476271 = R''	418,801777
Passage au périhélie	412,503799 = R	412,503799 = R	412,503799
	—43,158498 = $R'-R$	+ 5,972472 = $R''-R$	5,297978 = $R'''-R$

D'où résulte l'équation IV.), 412,503799 — 7,193083 x + 1,990824 y + 0,882998 z §. 36.

Calcul de l'observation du 27 Août 12h 10′ 40″

Premiere hypothêse	Seconde hypothêse	Troisieme hypothêse	Quatrieme hypoth.
U=53° 50′ n=12° 31′ 42″ q=85° 44′ 33	U=47° 50′ n=12° 31′ 42 q=85° 44′ 33	comme dans la premiere	comme dans la premiere hypothêse
$U-n$ = 41° 18′ 18″ $U+q$ = 139° 34′ 35″	$U-n$ = 35° 18′ 18″ $U+q$ = 133° 34′ 33″		
l. tang γ = 9,2304496	9,2304496	9,2304496	
l. sin ($U-n$) = 9,8195882	9,7618745	9,8195882	
l. tang γ sin ($U-n$) = 9,0500378	8,9923241	9,0500378	
l. sin I = 9,8472971	. . . . . .	9,8230810	
l. sin θ = 9,9954593	. . . . . .	9,9954593	
l. sin I sin θ = 9,8427564	9,8427564	9,8185403	
l. tang γ = 9,2304496	9,2304496	9,2304496	
l. cos I = 9,8516512	9,8516512	9,8730238	
l. cos ($U-n$) = 9,8757573	9,9117365	9,8757573	
8,9578581	8,9938373	8,9792307	
nombre = —0,090752	— 0,098591	—0,095330	
sin I sin θ = +0,696236	+ 0,696236	+0,658476	
+0,605484	+ 0,597645	+0,563146	

dont

dont le log. $=9,7821027$	$9,7764433$	$9,7506210$	
l. s. γ s. $(U-n)=9,0500378$	$8,9923241$	$9,0500378$	
l. tang $v=9,2679351$	$9,2158808$	$9,2994168$	
$v=10°29'57''$	$9°20'6''$	$11°16'9''$	
$P=153°45'23''$	$159°45'24''$	$153°45'24''$	
$P-v=143°15'26''$	$150°25'18''$	$142°29'15''$	
$l\,\alpha=0,0039900$	$0,0039900$	$0,0039900$	
l. sin $(U-v)=9,8195882$	$9,7618745$	$9,8195882$	
l. α sin $(U-v)=9,8235782$	$9,7658645$	$9,8235782$	
l. sin $I=9,8472971$	$9,8472971$	$9,8230810$	
sin $(U+p)=9,8118707$	$9,8372058$	$9,8118707$	
$9,6591678$	$9,6845029$	$9,6349517$	
l. tang $y=9,2304496$	$9,2304496$	$9,2304496$	
$0,4287182$	$0,4540533$	$0,4045021$	
nombre $=2,682983$	$2,844810$	$2,538060$	
-1	1	1	
$1,682983$	$1,844810$	$1,538060$	
le log. $=0,2260815$	$0,2659516$	$0,1869730$	
l. cos $I=9,8516512$	$9,8516512$	$9,8730238$	
l. sin $v=9,2606000$	$9,2100686$	$9,2909655$	
$9,3383327$	$9,3276714$	$9,3509623$	
l. α sin $(U-v)=9,8235782$	$9,7658645$	$9,8235782$	
l. $\delta=0,4852455$	$0,4381931$	$0,4726159$	$0,4852455$
l. c. $\left\{\frac{P-v}{2}\right\}^2=8,9971042$	$8,8149002$	$9,0143534$	$9,1233776$
l. $p=9,4823497$	$9,2530933$	$9,4869693$	$9,6086231$
$p=0,303633$	$0,179099=p'$	$0,306879=p''$	$0,406090=p'''$
	$0,303633=p$	$0,303633=p$	$0,303633=p$
	$-0,124534=p'-p$	$0,003246=p''-p$	$0,102457=p'''-p$

D'où résulte l'équation V.) $0,303633 - 0,022422\,x + 0,001682\,y + 0,077076\,z$.

Temps des tables			
995,7 jours	1800,6	941,9	667,4
dont le log. = 2,9981285	3,2554172	2,9740048	2,8243862
l. $\sqrt{p^3}$ = 9,2235245	8,8796399	9,2304539	9,4129331
2,2216530	2,1350571	2,2044587	2,2373193
nombre = 166,591490	136,476334	160,125000	172,709250
27 Août = 239,506898	239,506898	239,506898	239,506898
R = 406,098388	375,973232	399,631898	412,216148
= Passage au périhélie	406,098388	406,098388	406,098388
	— 30,125156	— 6,466490	+ 6,117760

D'où résulte l'équation VI.), 406,098388 — 5,020859 x + 2,155490 y + 1,019600 z.

§. 37. Pour déduire de ces équations les corrections x, y, z, il faut remarquer, que les trois *équations des distances périhélies devroient* être égales entr' elles, de même que les trois autres équations du temps du passage au périhélie, si les éléments supposés étoient exacts. Je retrancherai donc l'équation I. des équations marquées par III. & V., & il en viendra l'équation VII.) 0,067672 + 0,009962 x + 0,004119 y + 0,015565 z & l'équation VIII.), 0,044936 — 0,000309 x — 0,000222 y + 0,015736 z,

d'où l'on tire l'équation, IX), 0,4929 — 0,6400 x + 0,2646 y + z

& l'équation X.) 2,8619 — 0,0196 x + 0,1039 y + z

& enfin l'équation XI.) — 14,7417 + 4,1045 x + y.

De la même maniere on tirera des équations II, IV, VI, qui déterminent le temps du passage au périhélie, l'équation XII, qui ne contient que les deux variables x & y, savoir 0,1416 + 0,0290 x — y, & ajoutant les équations XI. & XII., on trouvera x = 3,53 = 3° 31′, & y = 0,244 = 12′, & z = — 2,838 = — 2° 48′. La longitude du noeud sera donc de 0ˢ 16° 10′ 37″ — 3° 31′ = 0ˢ 12° 39′, l'inclinaison = 44° 42′ 46″ — 44° 27′, & le lieu du périhélie = 5ˢ 19° 56′ + 2° 48′ = 5ˢ 22° 44′.

Avec ces trois éléments on recommencera le calcul d'une premiere hypothêse. Parceque les équations des distances périhélies & celles des passages au périhélie different considérablement entr' elles, il paroit que les éléments que nous venons de trouver ont besoin d'être encore corrigés, surtout la longitude du noeud. On

pourra donc diminuer de 6° la longitude du noeud, en la posant $= 0^{s}\, 6^{\circ}\, 39'$ dans la seconde hypothêse; on déminuera de 2 degrés l'inclinaison de l'orbite, & de 4 degrés, le lieu du périhélie pour établir la troisieme & la quatrieme hypothêse. Il faudra faire exactement le second calcul, d'où vriendront des résultats moins irréguliers. Si j'avois choisi des observations moins éloignées entr' elles comme je l'ai remarqué ci-dessus, je n'aurois pas trouvé des résultats tant éloignés de la vérité; mais je les ai employées à dessein pour faire connoître avec quelles précautions il faut se servir de nos méthôdes.

§. 38. Si l'on vouloit appliquer cette méthôde aux orbites elliptiques, on devroit chercher des équations pour le demi parametre, & pour l'excentricité, afin d'éviter le long calcul du temps du passage au périhélie. Pour cet effet, l'on combinera deux-à-deux, les distances du soleil à la Comète & les anomalies rélativement aux trois observations selon la formule $e = (D - d) : (d \cos (P - n) - D \cos (P - N))$. L'on formera, enfin, par le secours de la formule $b = D\, (1 + \cos P - N)$ *trois équations pour le demi-parametre, rélativement aux trois observations.*

F I N.

Tables d'Équations. N°. 1.

(1). $Y^2 - 4aX - 4a^2 = 0.$

(2). $b^2 x^2 + 2cbxy + c^2 y^2 - 4aby + 4acx - 4a^2 = 0.$

(3). $z - ex - fy = 0.$

(4). $\overline{Af^2 + Bef + Ce^2 + Df + Ee + F}.\, b^2 + \overline{B'ef + C'e^2 + D'f + E'e + F'}\, cb + \overline{C''e^2 + E''e + F''}.\, c^2$
$+ \overline{B'''ef + C'''e^2 + D'''f + E'''e + F'''}\, ab + \overline{A^{\mathrm{IV}} f^2 + B^{\mathrm{IV}} ef + C^{\mathrm{IV}} e^2 + D^{\mathrm{IV}} f + E^{\mathrm{IV}} e + F^{\mathrm{IV}}}\, ac + \overline{A^{\mathrm{V}} f^2 + B^{\mathrm{V}} ef + C^{\mathrm{V}} e^2 + D^{\mathrm{V}} f + E^{\mathrm{V}} e + F^{\mathrm{V}}}\, a^2 = 0$

(5). $B\overline{ef + \Gamma e^2 + \Delta f \cdots\cdots}\, b^2 + \overline{A' f^2 + B'ef + \Gamma' e^2 + \Delta f \cdots\cdots}\, bc + B''\overline{ef + \Gamma'' e^2 + \Delta'' f \cdots\cdots}\, c^2$
$+ \overline{A''' f^2 + B''' ef + \Gamma''' e^2 \cdots\cdots}\, ab + \overline{A^{\mathrm{IV}} f^2 + B^{\mathrm{IV}} ef + \Gamma^{\mathrm{IV}} e^2 \cdots\cdots}\, ac = 0.$

(6). $Aae + Bbe + Cbf + Da + Eb + Fe + Gf + H = 0.$

(7). $Ae^3 + Be^2 f + \Gamma e f^2 + A' e^2 + B' ef + \Gamma' f^2 + A'' e + B'' f + \Gamma'' = 0.$

(8). $e^{11} + Ae^{10} + A'e^9 + A''e^8 + A'''e^7 + A^{\mathrm{IV}} e^6 + A^{\mathrm{V}} e^5 + A^{\mathrm{VI}} e^4 + A^{\mathrm{VII}} e^3 + A^{\mathrm{VIII}} e^2 + A^{\mathrm{IX}} e + A^{\mathrm{X}} = 0.$

(9). $e^{11} + \overline{B + Cu + Dz}\, e^{10} + \overline{B' + C'u + D'z}\, e^9 + \overline{B'' + C''u + D''z}\, e^8 + \overline{B''' + C'''u + D'''z}\, e^7 + \overline{B^{\mathrm{IV}} + C^{\mathrm{IV}} u + D^{\mathrm{IV}} z}\, e^6 + \overline{B^{\mathrm{V}} + C^{\mathrm{V}} u + D^{\mathrm{V}} z}\, e^5$
$+ \overline{B^{\mathrm{VI}} + C^{\mathrm{VI}} u + D^{\mathrm{VI}} z}\, e^4 + \overline{B^{\mathrm{VII}} + C^{\mathrm{VII}} u + D^{\mathrm{VII}} z}\, e^3 + \overline{B^{\mathrm{VIII}} + C^{\mathrm{VIII}} u + D^{\mathrm{VIII}} z}\, e^2 + \overline{B^{\mathrm{IX}} + C^{\mathrm{IX}} u + D^{\mathrm{IX}} z}\, e + B^{\mathrm{X}} + C^{\mathrm{X}} u + D^{\mathrm{X}} z = 0.$

(10). $e^{11} + \overline{E + Fu + Gz}\, e^{10} + \overline{E' + F'u + G'z}\, e^9 + \overline{E'' + F''u + G''z}\, e^8 + \overline{E''' + F'''u + G'''z}\, e^7 + \overline{E^{\mathrm{IV}} + F^{\mathrm{IV}} u + G^{\mathrm{IV}} z}\, e^6 + \overline{E^{\mathrm{V}} + F^{\mathrm{V}} u + G^{\mathrm{V}} z}\, e^5$
$+ \overline{E^{\mathrm{VI}} + F^{\mathrm{VI}} u + G^{\mathrm{VI}} z}\, e^4 + \overline{E^{\mathrm{VII}} + F^{\mathrm{VII}} u + G^{\mathrm{VII}} z}\, e^3 + \overline{E^{\mathrm{VIII}} + F^{\mathrm{VIII}} u + G^{\mathrm{VIII}} z}\, e^2 + \overline{E^{\mathrm{IX}} + F^{\mathrm{IX}} u + G^{\mathrm{IX}} z}\, e + E^{\mathrm{X}} + F^{\mathrm{X}} u + G^{\mathrm{X}} z = 0.$

(11). $$\begin{array}{llll} Y^2 - 4a^2 & - 4aX + 6apX & + 2pX^2 & - p^2 X^2 = 0. \\ + 4a^2 p & & & - 2p^2 aX \\ & & & - p^2 a^2 \end{array}$$

(12). $\overline{Af^2 + Bef + Ce^2 + Df + Ee + F}\, b^2 + \overline{B'ef + C'e^2 + D'f + E'e + F'}\, bc + \overline{B'' f^2 + B''ef + C''e^2 + D''f + E''e + F''}\, c^2$
$+ \overline{E''' A}$ &c. $ab + \overline{A^{\mathrm{IV}} f^2}$ &c. $ac + \overline{A^{\mathrm{V}} f^2}$ &c. $a^2 = 0.$

$$(13).\quad P + \frac{dP}{de}de + \frac{dP}{df}df + \frac{dP}{de}dde + \frac{dP}{df}ddf + \frac{dP}{de}d3e + \frac{dP}{df}d3f \text{ \&c.} \ldots\ldots = 0.$$

$$\begin{array}{ll}
+\frac{ddP}{2de^2}de^2 & +\frac{ddP}{2de^2}\,2\,de\,dde \\
+\frac{ddP}{de\,df}de\,df & +\frac{ddP}{de\,df}\overline{de\,ddf + df\,dde} \\
+\frac{ddP}{2df^2}df^2 & +\frac{ddP}{2df^2}\,2\,df\,ddf \\
 & +\frac{d^3P}{6de^3}de^3 \\
 & +\frac{d^3P}{2de^2df}de^2df \\
 & +\frac{d3P}{2de\,df^2}de\,df^2 \\
 & +\frac{d3P}{6df^3}df^3
\end{array}$$

$$(A)\left\{\begin{array}{l}
P + \frac{dP}{de}de + \frac{dP}{df}df = 0.\ \frac{dP}{de}dde + \frac{dP}{df}ddf + \frac{ddP}{2de^2}de^2 + \frac{ddP}{df\,de}de\,df + \frac{ddP}{2df^2}df^2 = 0.\ \frac{dP}{de}d^3e + \frac{dP}{df}d3f + \frac{ddP}{de^2}de\,dde + \frac{ddP}{de\,df}\overline{de\,d^2f + df\,d^2e} + \frac{ddP}{df^2}df\,d^2f + \frac{d3P}{6de^3}de^3 + \frac{d^3P}{2de^2df}de^2df + \frac{d3P}{2de\,df^2}de^2df + \frac{d3P}{6df^3}df^3 = 0. \text{ \&c.} \\
P' + \frac{dP'}{de}de + \frac{dP'}{df}df = 0.\ \frac{dP'}{de}dde + \frac{dP'}{df}ddf + \frac{ddP'}{2de^2}de^2 + \frac{ddP'}{df\,de}de\,df + \frac{ddP'}{2df^2}df^2 = 0.\ \frac{dP'}{de}d^3e + \frac{dP'}{df}d3f + \frac{ddP'}{de^2}de\,d^2e + \frac{ddP'}{de\,df}\overline{de\,d^2f + df\,d^2e} + \frac{ddP'}{df^2}df\,d^2f + \frac{d^3P'}{6de^3}de3 + \frac{d^3P'}{2de^2df}de^2df + \frac{d^3P'}{2de\,df^2}de\,df^2 + \frac{d^3P'}{6df^3}df^3 = 0. \text{ \&c.}
\end{array}\right.$$

$$(B)\left\{\begin{array}{l}
de = \dfrac{P'\frac{dP}{df} - P\frac{dP'}{df}}{\frac{dP}{de}\frac{dP'}{df} - \frac{dP}{df}\frac{dP'}{de}},\ dde = \dfrac{\left[\frac{ddP'}{2de^2}de^2 + \frac{ddP'}{df\,de}de\,df + \frac{ddP'}{2df^2}df^2\right]\frac{dP}{df} - \left[\frac{ddP}{2de^2}de^2 + \frac{ddP}{de\,df}de\,df + \frac{ddP}{2df^2}df^2\right]\frac{dP'}{df}}{\frac{dP}{de}\frac{dP'}{df} - \frac{dP}{df}\frac{dP'}{de}}, \\
\qquad \dfrac{\left[\begin{array}{l}\frac{ddP'}{de^2}de\,d^2e + \frac{d^2P'}{de\,df}\overline{de\,d^2f + df\,d^2e}\,\frac{d^2P}{df^2}df\,d^2f \\ \frac{d3P'}{6de^3}de^3 + \frac{d^3P'}{2de^2df}de^2df + \frac{d^3P'}{2df^2de}de\,df^2 + \frac{d^3P'}{6df^3}df^3\end{array}\right]\frac{dP}{df} - \left[\begin{array}{l}\frac{ddP}{de^2}de\,d^2f + \frac{d^2P}{de\,df}\overline{de\,d^2f + df\,d^2e} + \frac{d^2P}{df^2}df\,d^2f \\ + \frac{d^3P}{6de^3}de^3 + \frac{d3P}{2de^2df}de^2df + \frac{d^3P}{2df\,d^2e}d^2f\,de + \frac{d^3P}{6df^3}df^3\end{array}\right]\frac{dP'}{df}}{\frac{dP}{de}\frac{dP'}{df} - \frac{dP}{df}\frac{dP'}{de}} = d^3e. \\
df = \dfrac{P'\frac{dP}{de} - P\frac{dP'}{de}}{\frac{dP}{df}\frac{dP'}{de} - \frac{dP}{de}\frac{dP'}{df}},\ ddf = \dfrac{\left[\frac{ddP'}{2df^2}df^2 + \frac{ddP'}{df\,de}de\,df + \frac{ddP'}{2de^2}de^2\right]\frac{dP}{de} - \left[\frac{ddP}{2df^2}df^2 + \frac{ddP}{de\,df}de\,df + \frac{ddP}{2de^2}de^2\right]\frac{dP'}{df}}{\frac{dP}{df}\frac{dP'}{de} - \frac{dP}{de}\frac{dP'}{df}}, \\
\qquad \dfrac{\left[\begin{array}{l}\frac{ddP'}{de^2}de\,d^2e + \frac{d^2P'}{de\,df}\overline{de\,d^2f + df\,d^2e} + \frac{d^2P}{df^2}df\,d^2f \\ \frac{d^3P'}{6de^3}de^3 + \frac{d^3P'}{2de^2df}de^2df + \frac{d^3P'}{2df^2de}de\,df^2 + \frac{d^3P'}{6df^3}df^3\end{array}\right]\frac{dP}{de} - \left[\begin{array}{l}\frac{ddP}{de^2}de\,d^2f + \frac{d^2P}{de\,df}\overline{de\,d^2f + df\,d^2e} + \frac{d^2P}{df^2}df\,d^2f \\ + \frac{d^3P}{6de^3}de3 + \frac{d3P}{2de^2de}de^2df + \frac{d^3P}{2df\,d^2e}d^2f\,de + \frac{d^3P}{6df^3}df3\end{array}\right]\frac{dP'}{de}}{\frac{dP}{df}\frac{dP'}{de} - \frac{dP}{de}\frac{dP'}{df}} = d3f.
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
e = \epsilon + A + (a A^2 + \overset{B}{\overline{b\,A\,A'}} + C A'^2) + (a' A^3 + b' A^2 A' + C' A \overset{C}{\overline{A'^2}} + e' A B + f' A B' + g A' B + h' A' B') + \text{\&c.} \\
f = f + A' + (\alpha A^2 + \overset{B'}{\overline{\beta\,A\,A'}} + \gamma A^2) + (\alpha' A^3 + \beta' A'^2 A + \gamma' A_1 \overset{C'}{\overline{A'}} + \iota A' B' + \iota A' B + \lambda A B' + \mu A' B') + \text{\&c.}
\end{array}\right.$$

$$(D)\quad \begin{cases} M + \dfrac{dP}{de}\, d^n e + \dfrac{dP}{df}\, d^n f + \dfrac{dP}{dg}\, d^n g + \&c. \\[2ex] M' + \dfrac{dP'}{de}\, d^n e + \dfrac{dP'}{df}\, d^n f + \dfrac{dP'}{dg}\, d^n g + \&c. \\[2ex] M'' + \dfrac{dP''}{de}\, d^n e + \dfrac{dP''}{df}\, d^n f + \dfrac{dP''}{dg}\, d^n g + \&c. \end{cases}$$

$$(E)\quad \begin{cases} \text{d'où } d^n e = A M + B M' + C M'' \; \&c. \\ d^n f = A' M' + B' M + C' M'' \; \&c. \\ d^n g = A'' M'' + B'' M' + C'' M \; \&c. \end{cases}$$

$$(F)\quad \begin{array}{lllll} P & + P_{,} & + P_{,,} & + P_{,,,} & + P_{,,,,} \; \cdots\cdots = 0. \\ & + Q dq & + Q d^2 q & + Q d^3 q & + Q d^4 q \\ & & + Q_{,} dq & + Q_{,} d^2 q & + Q_{,} d^3 q \\ & & & + Q_{,,} dq & + Q_{,,} d^2 q \\ & & & & + Q_{,,,} dq \\ & & + R dq^2 & + 2 R dq d^2 q & + R d^2 q^2 \\ & & & & + 2 R dq d^3 q \\ & & & + R_{,} dq^2 & + 2 R_{,} dq ddq \\ & & & & + R_{,,} dq^2 \\ & & & + S dq^3 & + 3 S dq^2 ddq \\ & & & & + S_{,} d' q^3 \end{array}$$

$$(A)\quad \begin{cases} p + qa + ra' + sa'' + ta''' + a'''' = 0. \\ p' + qa + r'a' + s'a'' + t'a''' + a'''' = 0. \\ p'' + q'a + r''a' + s''a'' + t''a''' + a'''' = 0. \\ p''' + q'''a + r'''a' + s'''a'' + t'''a''' + a''' = 0. \\ p'''' + q''''a + r''''a' + s''''a'' + t''''a''' + a''' = 0. \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} p - p' + t - t'a''' + s - s'a'' + r - r'a' + q - q'a = 0. \\ p - p'' + t - t''a''' + s - s''a'' + r - r''a' + q - q''a = 0. \\ p - p''' + t - t^{v'}a''' + s - s'''a'' + r - r'''a' + q - q'''a = 0. \\ p - p'''' + t - t''''a''' + s - s''''a'' + r - r''''a' + q - q''''a = 0. \end{cases}$$

$$\text{(C)}\begin{cases}
\overset{P}{(\overline{p-p'}\,.\,\overline{q-q''}-\overline{p-p''}\,.\,\overline{q-q'})}+\overset{Q}{(\overline{t-t'}\,.\,\overline{q-q''}-\overline{t-t''}\,.\,\overline{q-q'})}\,a'''+\overset{R}{(\overline{s-s'}\,.\,\overline{q-q''}-\overline{s-s''}\,.\,\overline{q-q'})}\,a''+\overset{S}{(\overline{r-r'}\,.\,\overline{q-q''}-\overline{r-r''}\,.\,\overline{q-q'})}\,a'=0. \\
\overset{P'}{(\overline{p-p'}\,.\,\overline{q-q'''}-\overline{p-p'''}\,.\,\overline{q-q'})}+\overset{Q'}{(\overline{t-t'}\,.\,\overline{q-q'''}-\overline{t-t'''}\,.\,\overline{q-q'})}\,a'''+\overset{R'}{(\overline{s-s'}\,.\,\overline{q-q'''}-\overline{s-s'''}\,.\,\overline{q-q'})}\,a''+\overset{S'}{(\overline{r-r'}\,.\,\overline{q-q'''}-\overline{r-r'''}\,.\,\overline{q-q'})}\,a'=0. \\
\overset{P''}{(\overline{p-p'}\,.\,\overline{q-q^{IV}}-\overline{p-p^{IV}}\,.\,\overline{q-q'})}+\overset{Q''}{(\overline{t-t'}\,.\,\overline{q-q^{IV}}-\overline{t-t^{IV}}\,.\,\overline{q-q'})}\,a'''+\overset{R''}{(\overline{s-s'}\,.\,\overline{q-q^{IV}}-\overline{s-s^{IV}}\,.\,\overline{q-q'})}\,a''+\overset{S''}{(\overline{r-r'}\,.\,\overline{q-q^{IV}}-\overline{r-r^{IV}}\,.\,\overline{q-q'})}\,a'=0.
\end{cases}$$

$$\text{(D)}\begin{cases}
\overset{O}{\overline{PS'-P'S}}+\overset{M}{\overline{QS'-QS}}\,a'''+\overset{N}{\overline{RS'-RS'}}\,a''=0. \\
\overset{O'}{\overline{PS''-P''S}}+\overline{P\,\overline{q-q'}\,z'}+\overset{M'}{\overline{QS''-Q''S}}+a'''+\overset{N'}{\overline{RS''-R''S}}\,a''
\end{cases}$$

$$\text{(F)}\begin{cases}
A=\dfrac{ON'-NO'}{MN'-NM'} \\
B\ \dfrac{OM'-O'M}{NM'-N'M}
\end{cases}$$

& comme p^{IV}, q^{IV}, r^{IV}, s^{IV}, doivent être augmentées des quantités z, $a'z$, $a''z$, $a'''z$, nous aurons $a'''=A+\frac{dA}{dp^{IV}}z+\frac{dA}{dq^{IV}}a'z+\frac{dA}{dr^{IV}}a''z+\frac{dA}{ds^{IV}}a'''z$,

& $a''=-B-\frac{dB}{dp^{IV}}z-\frac{dB}{dq^{IV}}az-\frac{dB}{dr^{IV}}a'z-\frac{dB}{ds^{IV}}a''z$.

$$(1).\ d.\frac{dr\cos.x - r\sin x dx}{dt} + \frac{Tr\cos.xdt}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{C'r\cos.x - r'\cos.x'dt}{f''^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr\cos.x - r''\cos.x''dt}{f'''^{\frac{3}{2}}} + \frac{Cr\cos.xdt}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{C'r'\cos.x'dt}{f'^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr''\cos.x''dt}{f^{v\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(2).\ d.\frac{dr\sin.x + r\cos.xdx}{dt} + \frac{Tr\sin.xdt}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{C'r\sin.x - r'\sin.x'dt}{f''^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr\sin.x - r''\sin.x''dt}{f'''^{\frac{3}{2}}} + \frac{Cr\sin.xdt}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{C'r'\sin.x'dt}{f'^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr''\sin.x''dt}{f^{v\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(3).\ d.\frac{dz}{dt} + \frac{Tzdt}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{C'\overline{z - z'}dt}{f''^{\frac{3}{2}}} + \frac{Szdt}{f'''^{\frac{3}{2}}} + \frac{Czdt}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{C'z'dt}{f'^{\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(4).\ d.\frac{dr'\cos.x' - r'\sin.x'dx'}{dt} + \frac{Tr'\cos.x'dt}{f'^{\frac{3}{2}}} + \frac{C'\cos.x' - r\cos.xdt}{f''^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr'\cos.x' - r''\cos.x''dt}{f^{IV\frac{3}{2}}} + \frac{C'r'\cos.x'dt}{f'^{\frac{3}{2}}} + \frac{Cr\cos.xdt}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr''\cos.x'dt}{f'^{\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(5).\ d.\frac{dr'\sin.x' + r'\cos.x'dx'}{dt} + \frac{Tr'\sin.x'dt}{f'^{\frac{3}{2}}} + \frac{Cr'\sin.x' - r\sin.xdt}{f''^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr'\sin.x' - r''\sin.x''dt}{f^{IV\frac{3}{2}}} + \frac{C'r'\sin.x'dt}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{Cr\sin.xdt}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr''\sin.x''dt}{f^{v\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(6).\ d.\frac{dz'}{dt} + \frac{Tz'dt}{f'^{\frac{3}{2}}} + \frac{C\overline{z' - z}}{f'^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sz'dt}{f^{IV\frac{3}{2}}} + \frac{C'z'dt}{f'^{\frac{3}{2}}} + \frac{Czdt}{f^{\frac{3}{2}}} + = o.$$

$$(7)\quad r''.\overline{a + b\cos.x''} - 1 = o.$$

$$(8).\ dx'' - a'dt - b'\cos.x''dt - c'\cos.x''^{2}dt = o.$$

$$(9).\ d.\frac{\overline{dr + dR}.\cos.\overline{x + X} - \overline{r + R}.\sin.\overline{x + X}\ \overline{dx + dX}}{dt} + \frac{S.\overline{r + R}.\cos.\overline{x + X} - r''\cos.x''dt}{f'''^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr''\cos.x''dt}{f^{v\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(10).\ d.\frac{\overline{dr + dR}.\sin.\overline{x + X} - \overline{r + R}.\cos.\overline{x + X}\ \overline{dx + dX}}{dt} + \frac{S.\overline{r + R}.\sin.\overline{x + X} - r''\sin.x''dt}{f^{IV\frac{3}{2}}} + \frac{Sr''\sin.x''dt}{f^{v\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(11.)\ d.\frac{dz + dZ}{dt} + \frac{Sz + Z}{f'''^{\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(12.)\ d.\frac{dr' + dR'.\ cos.\ \overline{x' + X'} - \overline{r' + R'}\ sin.\ \overline{x' + X'}\ dx' + X'}{dt} + \frac{S\overline{r' + R'}.\ cos.\ \overline{x' + X'} - r''\ cos.\ x''}{f_{,}^{IV\frac{3}{2}}}\ dt + \frac{Sr''\ cos.\ x''}{f^{V\frac{3}{2}}}\ dt = o.$$

$$(13).\ d.\frac{dr' + dR'.\ sin.\ \overline{x' + X'} + \overline{r' + R'}\ cos.\ \overline{x' + X'}dx' + dX'}{dt} + \frac{S\overline{r + R}.\ sin.\ \overline{x' + X'} - r''\ sin.\ x''}{f_{,}^{IV\frac{3}{2}}}\ dt + \frac{Sr''\ cos.\ x''}{f^{V\frac{3}{2}}}$$

$$(14).\ d.\frac{dz' + dZ'}{dt} + \frac{S\overline{z' + Z'}}{f^{IV}}\ dt = o.$$

$$(15)\ .d.\frac{\overline{dR + dr}.\ cos.\ \overline{x + X} - \overline{r + R}\ sin.\ \overline{x + X}\ dx + dX}{dt} + \frac{T\overline{r + R}\ cos.\ \overline{x + X}}{f_{,}^{\frac{3}{2}}}\ dt + \frac{C\overline{r + R}\ cos.\ \overline{x + X} - \overline{r' + R'}\ cos.\ \overline{x' + X'}}{f_{,}'^{\frac{3}{2}}} + \frac{C\overline{r + R}.\ cos.\ \overline{x + X}}{f_{,}^{\frac{3}{2}}}\ dt$$

$$+ \frac{C'\overline{r' + R'}.\ cos.\ \overline{x' + X'}}{f_{,}^{\frac{3}{2}}}\ dt + \frac{Sr''\ cos.\ x''}{f^{V\frac{3}{2}}}\ dt$$

$$(16).\ d.\frac{\overline{dr + dR}.\ sin.\ \overline{x + X} + \overline{r + R}.\ cos.\ \overline{x + X}\ dx + dX}{dt} + \frac{T\overline{r + R}\ sin.\ \overline{x + X}}{f_{,}^{\frac{3}{2}}}\ dt + \frac{C\overline{r + R}.\ sin.\ \overline{x + X} - \overline{r' + R'}\ sin.\ \overline{x' + X'}}{f'^{\frac{3}{2}}} + \frac{C\overline{r + R}.\ sin.\ \overline{x + X}}{f_{,}^{\frac{3}{2}}}\ dt$$

$$+ \frac{C'\overline{r' + R'}.\ sin\ \overline{x' + X'}}{f_{,}^{\frac{3}{2}}}\ dt + \frac{Sr''\ sin.\ x''}{f^{V\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(17).\ d.\frac{dz + dZ}{dt} + \frac{T\overline{z + Z}}{f_{,}^{\frac{3}{2}}}\ dt + \frac{C\overline{z - z' + Z - Z'}}{f_{,}''}\ dt + \frac{C\overline{z + Z}}{f_{,}^{\frac{3}{2}}}\ dt + \frac{C'\overline{z' + Z'}}{f_{,}'^{\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(18).\ d.\frac{dr' + dR'.\ cos.\ \overline{x' + X'} - \overline{r' + R'}\ sin.\ \overline{x' + X'}dx' + dX'}{dt} + \frac{T\overline{r' + R'}\ cos.\ \overline{x' + X'}dt}{f_{,}^{\frac{3}{2}}} + \frac{C\overline{r' + R'}\ cos.\ \overline{x' + X'} - \overline{r + R}\ cos.\ \overline{x + X}dt}{f_{,}'^{\frac{3}{2}}} + \frac{C'\overline{r' + R'}\ cos.\ \overline{x' + X'}dt}{f'^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{C\overline{r + R}\ cos.\ \overline{x + X}dt}{f_{,}^{\frac{3}{2}}} + \frac{Sr''\ cos.\ x\ dt}{f''^{\frac{3}{2}}} = o.$$

$$(19).\ d.\ \frac{\overline{dr + dR}.\sin. x' + X' + r' + R\cos. x' + X'\,dx' + dX'}{dt} + \frac{Tr' + R'\sin. x' + X'}{f_{,}^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cr' + R'\sin. x' + X' - r + R\sin. x + X}{f_{,}'^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cr' + R'\sin. x' + X'dt}{f_{,}'^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{Cr' + R\cos. x' + X'}{f_{,}^{\frac{1}{2}}} + \frac{Sr''\sin. x'}{f''^{\frac{1}{2}}} = o.$$

$$(20).\ d.\ \frac{ddz + dZ'}{dt} + \frac{Tz + Z'}{f_{,}^{\frac{1}{2}}}dt + \frac{Cz' + Z' - z - Z}{f_{,}''^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cz' + Z}{f_{,}'^{\frac{1}{2}}}dt + \frac{Cz + Z}{f_{,}^{\frac{1}{2}}} = o.$$

$$(21)\ d.\ \frac{dr\cos. x - r\sin. x\,dx}{dt} + \frac{Tr\cos. x\,dt}{f^{\frac{1}{2}}} + \frac{C'r\cos. x - \overline{r + R}\cos. x + X\,dt}{f_{,}''^{\frac{1}{2}}} + \frac{Sr\cos. x - r''\cos. x''dt}{f''^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cr\cos. x\,dt}{f^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cr + R\cos. x + X}{f_{,}^{\frac{1}{2}}} + \frac{Sr'\cos. x'dt}{f^{v\frac{1}{2}}} = o.$$

$$(22).\ d.\ \frac{dr\sin. x + r\cos. x\,dx}{dt} + \frac{Tr\sin. x\,dt}{f^{\frac{1}{2}}} + \frac{C'r\sin. x - r + R\sin. x + X\,dt}{f_{,}'^{\frac{1}{2}}} + \frac{Sr\sin. x - r''\sin. x'\,dt}{f''^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cr\sin. x\,dt}{f^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cr + R\sin. x + X}{f_{,}^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sin. r''\cos. x''dt}{f^{v\frac{1}{2}}} = o.$$

$$(23).\ d.\ \frac{dz}{dt} + \frac{Tz\,dt}{f^{\frac{1}{2}}} + \frac{C'Z\,dt}{f_{,}''^{\frac{1}{2}}} + \frac{Sz\,dt}{f''^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cz\,dt}{f^{\frac{1}{2}}} + \frac{C'z + Z\,dt}{f_{,}^{\frac{1}{2}}} = o.$$

$$(24).\ d.\ \frac{\overline{dr + dR}\ \cos. \overline{x + X} - \overline{r + R}\ \sin. \overline{x + X}\ \overline{dx + dX}}{dt} + \frac{Tr + R\cos. x + X}{f_{,}^{\frac{1}{2}}}dt + \frac{Cr + R.\cos. x + X - r\cos. x\,dt}{f_{,}'^{\frac{1}{2}}} + \frac{Sr + R\cos. x + X - r''\cos. x''dt}{f_{,}''^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{C'r + R\cos. x + X\,dt}{f_{,}^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cr\cos. x\,dt}{f^{\frac{1}{2}}} + \frac{Sr''\cos. x''dt}{f^{v\frac{1}{2}}} = o.$$

$$(25).\ d.\ \frac{dr + dR\ \sin. x + X + r + R\ \cos. x + X\ dx + dX}{dt} + \frac{Tr + R\sin. x + X\,dt}{f_{,}^{\frac{1}{2}}}dt + \frac{\overline{Cr + R}.\sin. \overline{x + X} - r\sin. x\,dt}{f_{,}'^{\frac{1}{2}}} + \frac{Sr + R\sin. \overline{x + X} - r''\sin. x\,dt}{f_{,}''^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{C'r + R\sin. x + X\,dt}{f_{,}^{\frac{1}{2}}} + \frac{Cr + \sin. x\,dt}{f^{\frac{1}{2}}} + \frac{Sr''\cos. x''dt}{f^{v\frac{1}{2}}} = o.$$

$$(26).\ d.\ \frac{dz + dZ}{dt} + \frac{Tz + Z}{f_{,}^{\frac{1}{2}}} + \frac{CZ}{f_{,}'^{\frac{1}{2}}}dt + \frac{Sz + Z}{f^{iv\frac{1}{2}}}dt + \frac{Cz + Z}{f_{,}^{\frac{1}{2}}}do + \frac{Cz\,dt}{f^{\frac{1}{2}}} = o.$$

Fig. 1.

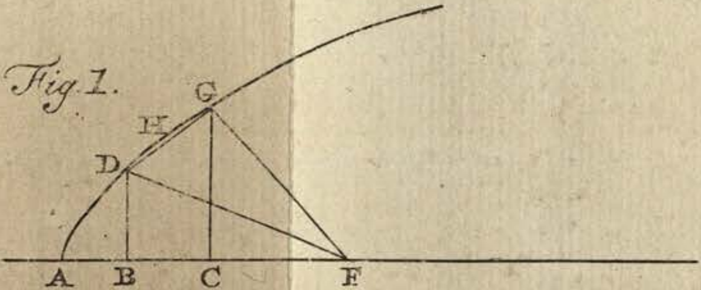


Fig. 3.

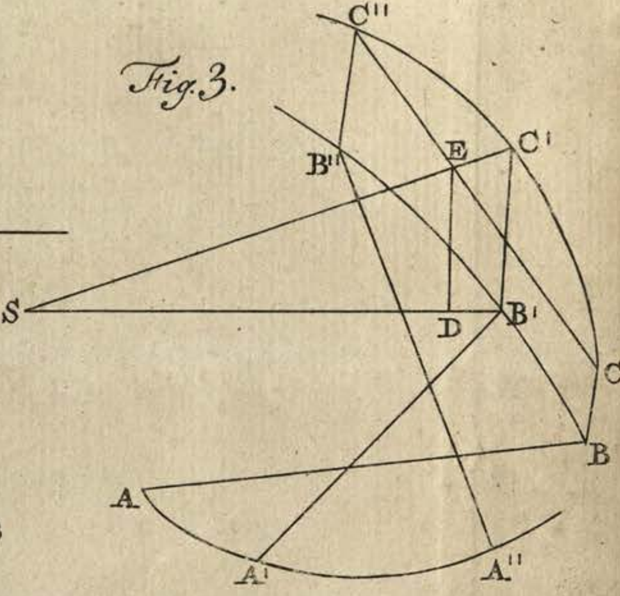


Fig. 4.

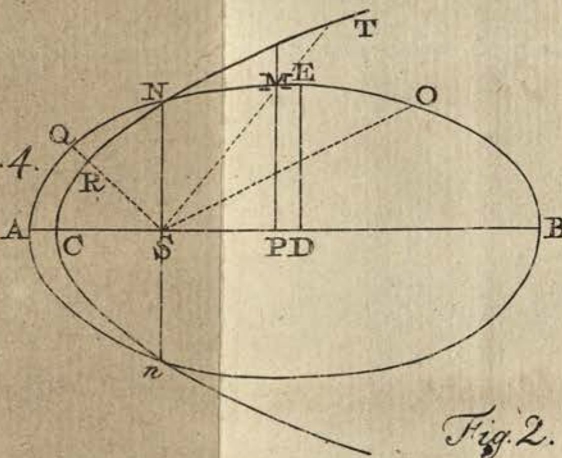


Fig. 2.

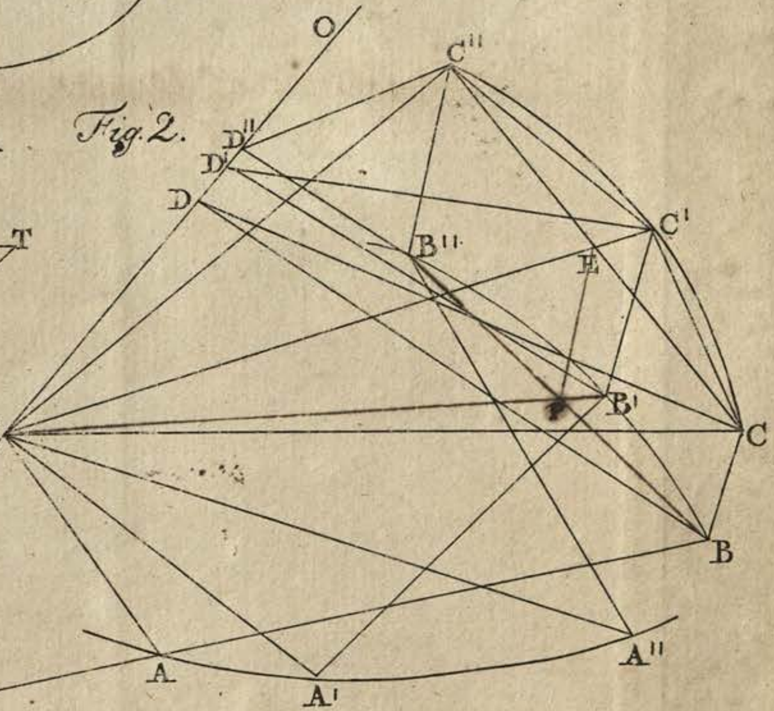


Fig. 5.

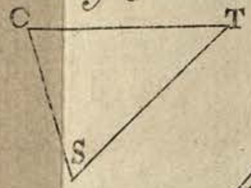


Fig. 6.

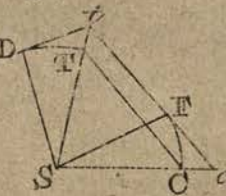


Fig. 7.

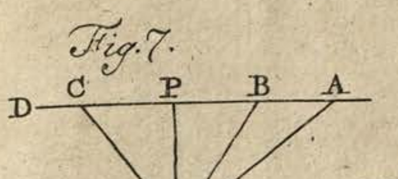
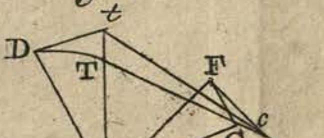


Fig. 8.



H. sc.

Planche. II.

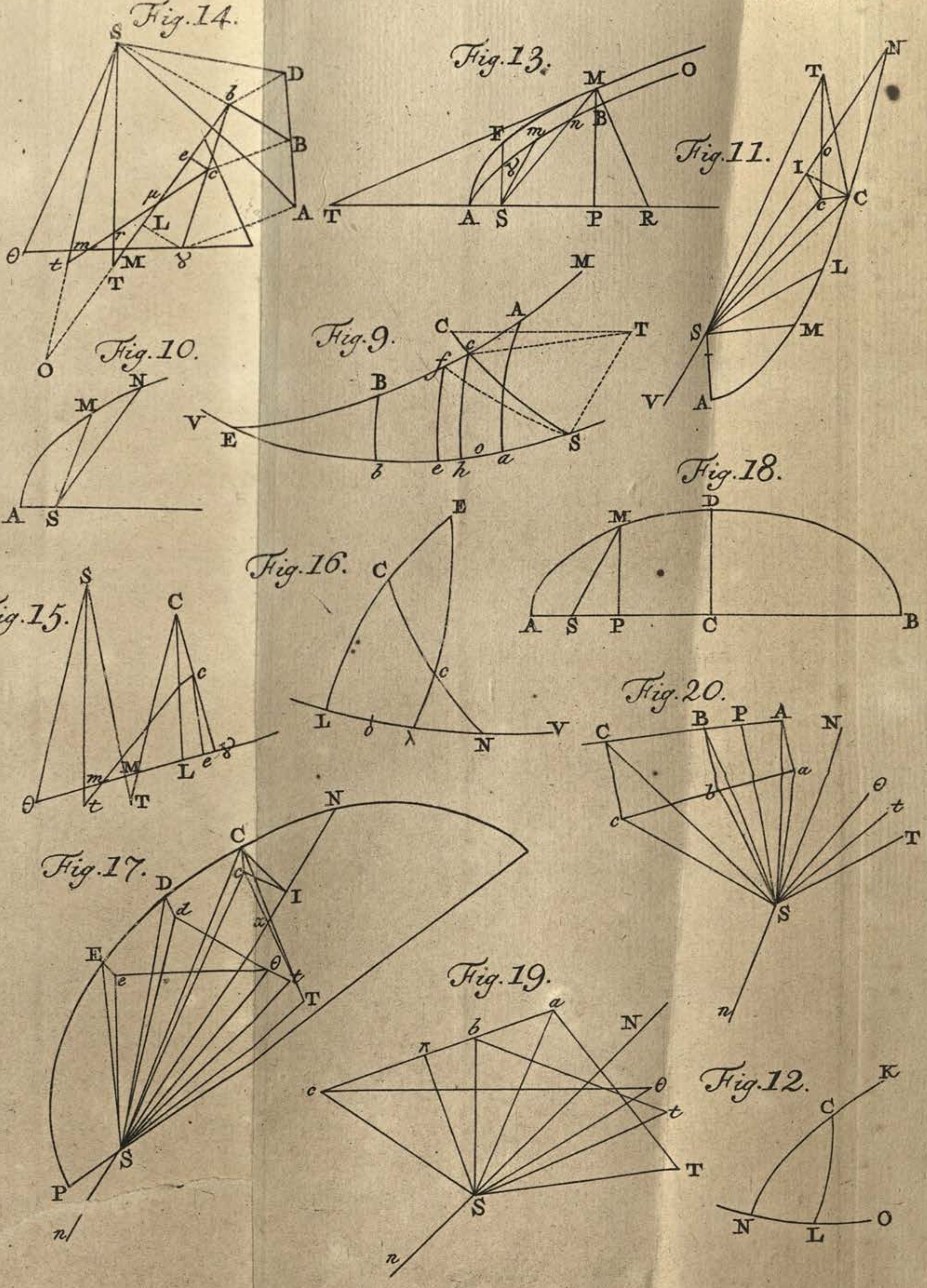


Fig. 14.
Fig. 13.
Fig. 11.
Fig. 10.
Fig. 9.
Fig. 18.
Fig. 16.
Fig. 15.
Fig. 20.
Fig. 17.
Fig. 19.
Fig. 12.

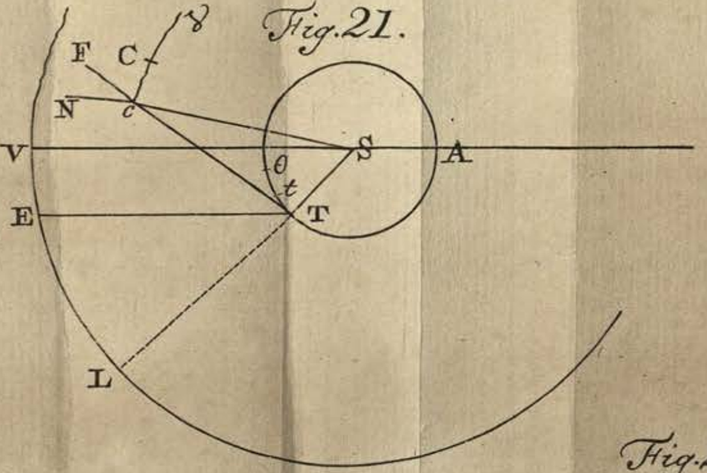
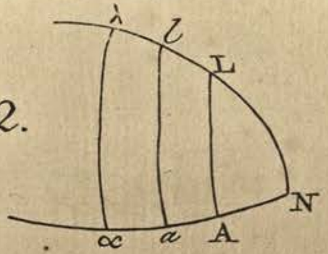


Fig. 21.

Fig. 22.


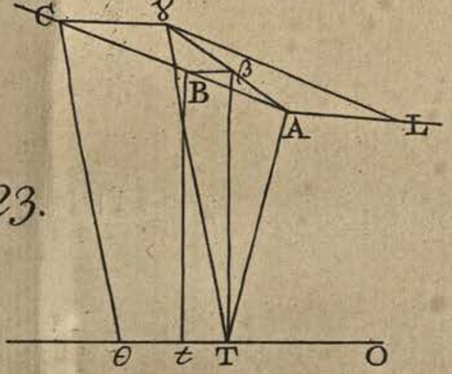


Fig. 23.

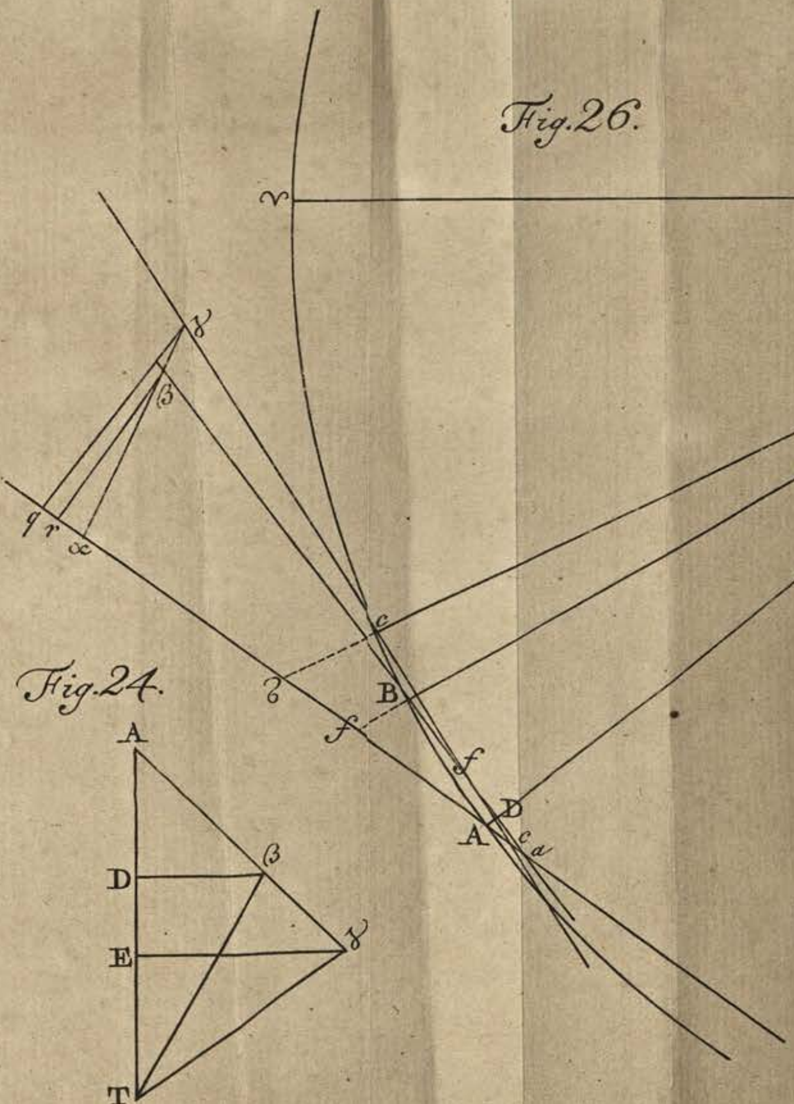
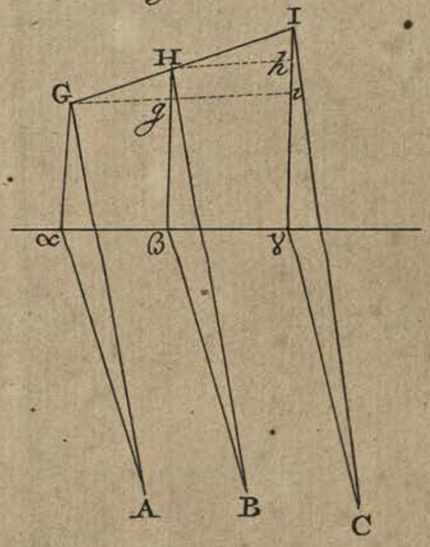


Fig. 26.

Fig. 24.

Fig. 25.


00053367

Digitized with financial assistance from
Observer Research Foundation
on 22 February, 2020